

UNIFICACIÓN PARAMÉTRICA DEL ANÁLISIS ESTRUCTURAL: FORMULACIÓN CLÁSICA Y ELEMENTOS FINITOS MIXTOS

CARLOS A. FELIPPA

*Department of Aerospace Engineering Sciences
and Center for Aerospace Structures
University of Colorado, Boulder
CO 80309-0429, USA*

RESUMEN

En este artículo los conceptos y métodos previamente desarrollados para Principios Variacionales Parametrizados (PVPs) se extienden al Análisis Matricial de Estructuras (AME). Los parámetros libres aparecen como factores de peso de las ecuaciones discretizadas. Combinando esta idea con técnicas de manipulación de matrices se obtiene un espectro continuo de ecuaciones supermatriciales. Dando valores numéricos a los parámetros se generan métodos específicos de solución. Varios de estos métodos son bien conocidos, mientras que otros son oscuros o nuevos. Este procedimiento se aplica primero al clásico análisis matricial de entramados y pórticos, seguido por el estudio de una clase importante de elementos finitos generados por un PVP mixto con tres parámetros libres, que tienen desplazamientos nodales como grados de libertad conectados. Una ventaja de este desarrollo "descendiente" de esquemas de solución es la unificación y clasificación sistemática de métodos aparentemente desconectados. Adicionalmente, la cuestión de dualidad entre representaciones en el espacio de variación y el espacio nulo se clarifica completamente.

SUMMARY

In this article concepts and techniques from the field of Parametrized Variational Principles (PVPs) are extended to Matrix Structural Analysis (MSA). Free parameters are used as weighting factors of governing discrete equations. Combining this idea with matrix manipulation techniques yields a continuous spectrum of supermatrix equations. Setting parameters to numerical values provides specific solution methods, some of which are well known whereas others are obscure or new. This approach is applied to the classical MSA of truss and framework structures as well as to the important class of displacement-connected finite element models generated by a mixed PVP with three free parameters. The main advantage of this "top down" derivation of solution schemes is the unification of seemingly disjoint methods for classification purposes. In addition, the question of duality between range-space and null-space representations is clarified once and for all.

Recibido: Septiembre 1995

INTRODUCCIÓN

El trabajo previo en Principios Variacionales Parametrizados, o PVPs, reseñado en un artículo reciente ¹ ha permitido el desarrollo de *familias* de principios variacionales mixtos e híbridos. El número de parámetros libres en una familia particular depende de la estructura del funcional generador y de la selección de campos independientes. Por el momento, la aplicación más estudiada es la elasticidad lineal compresible. Para esta aplicación se ha demostrado ^{2,3} que *tres* parámetros libres son suficientes para generar todos los principios mixtos e híbridos en los que los desplazamientos varían independientemente. Principios canónicos como el de Energía Potencial Total o el de Hu-Washizu, se obtienen dando valores numéricos específicos a los tres parámetros.

El desarrollo original de PVPs⁴⁻⁶ fue motivado por aplicaciones al Método de Elementos Finitos (MEF). Estas aplicaciones han abordado principalmente el *nivel de elementos* e incluyen la formulación de elementos de alto rendimiento, el desarrollo de indicadores de error con información local y la construcción de “reglas” (*templates*).⁷ Un aspecto común de estos temas es que los PVPs permiten la construcción de familias de elementos. Como en el caso de funcionales, se obtienen elementos específicos dando valores numéricos a los parámetros.

Este artículo estudia la aplicación de formulaciones parametrizadas al *nivel de ensamblaje*. Se considera más detalladamente la representación analítica de las ecuaciones ensambladas de elementos finitos en las que los *parámetros se dejan libres*. Comenzando con esta representación y procediendo con una combinación de álgebra matricial y selección de parámetros se demuestra que es posible generar no solamente todos los métodos bien conocidos del Análisis Matricial de Estructuras, sino también otros que son relativamente oscuros o desconocidos. Aunque para el AME los últimos son principalmente curiosidades, se presentan para completar la taxonomía y como fuente de ejercicios educativos. En aras de la brevedad, ciertas nomenclaturas y algoritmos se toman directamente de la optimización cuadrática con restricciones, tema que puede ser formulado en correspondencia biunívoca con el AME.⁸

Este esquema de unificación es aplicable a cuatro tipos de modelos estructurales:

- (1) El clásico Análisis Matricial de Estructuras reticuladas (entramados y pórticos).
- (2) Modelos MEF conectados por desplazamientos y generados por PVP mixtos.
- (3) Modelos MEF conectados por desplazamientos y tensiones y generados por PVP mixtos.
- (4) Elementos y superelementos contruidos con formulaciones PVP híbridas.

Por razones de espacio este artículo sólo aborda la formulación de los casos (1) y (2), dejando los más complicados (3) y (4) para consideración futura.

El presente estudio, siendo el primero en este tema, debe considerarse exploratorio. En consecuencia, es probable que haya duplicaciones y sendas inproductivas. Sin embargo, se verá que el uso de parámetros ilumina rasgos comunes de métodos que a primera vista aparecen completamente desconectados.

EL ANÁLISIS MATRICIAL DE ESTRUCTURAS CLÁSICO

El análisis matricial de estructuras (AME) clásico se utiliza para simulación numérica, usando métodos matriciales, de estructuras reticuladas (entramados y pórticos) con comportamiento lineal y modeladas con elementos de barra y viga. Como se discute en más detalle en el apartado “¿Quién escribió la primera matriz de rigidez o flexibilidad?” la emergencia de esta rama de la Mecánica Estructural se remonta a la industria aeronáutica europea de los años 1930. Esta aplicación original de las técnicas matriciales ayudó a la organización sistemática de cálculos repetitivos para análisis de vibraciones e inestabilidad aerolástica usando calculadoras manuales. Como se ve, este uso antecede por dos décadas la aparición del Método de Elementos Finitos (MEF) y de ordenadores digitales comerciales.

En las disciplinas de ingeniería que incluyen estructuras: Aeronáutica, Civil y Mecánica, el clásico AME generalmente se enseña (en los EEUU) a estudiantes universitarios durante el tercer año de estudios. Esta instrucción proporciona una base para el eventual uso del MEF en cursos más avanzados. El tema se puede cubrir usando métodos básicos de energía, como el Principio de Trabajos Virtuales, y no se requiere o espera a este nivel conocimientos de cálculo de variaciones. Procediendo de manera similar, el clásico AME se usa en el apartado siguiente para introducir las operaciones matriciales fundamentales, conjuntamente con el uso de parámetros libres, que juegan el papel de ponderación de ecuaciones en residuos. Esta estrategia evita las complicaciones del MEF para medios continuos. En el tercer apartado emergen las propiedades del caso general que estudia las propiedades de una clase importante de elementos mixtos.

Vectores de estado y datos

Consideremos una estructura elástica lineal de tipo articulada o reticulada bajo cargas estáticas conservativas. El modelo matemático discreto de la estructura es un ensamblaje de elementos de barras o piezas conectados en nudos. Estos elementos estructurales se denominan *miembros*. Las incógnitas del modelo discreto se agrupan en los tres vectores de estado siguientes, que tienen significado físico directo:

- f** Vector de n_f fuerzas internas (también llamadas fuerzas resultantes, esfuerzos o tensiones generalizadas). Estas fuerzas se obtienen integrando las tensiones que actúan sobre las secciones transversales de los miembros. Las fuerzas internas *no son* continuas entre elementos y, en realidad, esa continuidad no tendría sentido en nudos que unen más de dos miembros.
- g** Vector de $n_g = n_f$ deformaciones internas (también llamadas deformaciones generalizadas), que es el vector dual de **f**.
- v** Vector que contiene n_v componentes de desplazamientos nodales. Los nodos se asocian a los nudos y posiblemente (en el caso de pórticos) a secciones intermedias de los miembros.

Al menos que se advierta lo contrario, se supondrá que los *desplazamientos nulos impuestos han sido eliminados* de **v**. En particular, todos los movimientos rígidos de la estructura han sido explícitamente excluidos. Las formulaciones que satisfacen

esta suposición se identifican colectivamente en lo que sigue por el acrónimo DCE, que significa *Desplazamientos Conocidos Excluidos*. Por supuesto, si se imponen ciertos desplazamientos *no nulos*, las formulaciones de tipo DCE son insuficientes y debe usarse la forma más general DCI discutida más adelante.

También se supondrá independencia lineal completa entre las componentes de \mathbf{f} , \mathbf{g} y \mathbf{v} . Como consecuencia, si $n_f = n_v$ el modelo estructural discreto se llama *estáticamente determinado* o *isostático*. Si $n_f > n_v$ el modelo se llama *estáticamente indeterminado* o *hiperestático*. El caso $n_f < n_v$, que indica la existencia de mecanismos internos (es decir la estructura es cinemáticamente inestable), no se tratará en este artículo.

Los datos del problema se organizan en los vectores siguientes:

- \mathbf{p} Vector de n_v fuerzas nodales mecánicas que corresponden a los desplazamientos nodales \mathbf{v} .
- \mathbf{g}^0 Vector de $n_g = n_f$ deformaciones iniciales, es decir el valor que toma \mathbf{g} si todas las fuerzas internas \mathbf{f} se anulan. Este vector recibe frecuentemente el nombre de *vector de deformaciones iniciales*.
- \mathbf{f}^0 Vector de $n_g = n_f$ fuerzas internas iniciales, es decir el valor tomado por \mathbf{f} si todas las deformaciones \mathbf{g} se anulan. Este vector recibe frecuentemente el nombre de *vector de esfuerzos iniciales*.

Las deformaciones y esfuerzos iniciales tienen en cuenta efectos debidos a variaciones de temperatura, pretensado, falta de ajuste, o efectos no-lineales tratados por el método de pseudo-fuerzas. Estos vectores están conectados por las relaciones $\mathbf{g}^0 = -\mathbf{C}\mathbf{f}^0$ y $\mathbf{f}^0 = -\mathbf{S}\mathbf{g}^0$, donde \mathbf{C} y \mathbf{S} son las matrices de conformidad y rigidez material, respectivamente, definidas más adelante.

Forma de espacio de variación (EV) de las ecuaciones DCE

Las ecuaciones que vinculan \mathbf{f} , \mathbf{g} y \mathbf{v} a los datos se organizan en tres grupos, que se identifican con los símbolos $\{\mathbf{K}_r\}$, $\{\mathbf{C}\}$ y $\{\mathbf{E}_r\}$. Estos indican las ecuaciones cinemáticas (*kinematics*), constitutivas y de equilibrio, respectivamente. El subíndice r indica que las ecuaciones pertenecen al espacio de variación (EV) (*range space*) como se explica a continuación. Las formas recíprocas (de deformaciones a fuerzas internas y de fuerzas internas a deformaciones) de las ecuaciones constitutivas se denominan $\{\mathbf{C}_f\}$ y $\{\mathbf{C}_g\}$, respectivamente. Adoptando una nomenclatura común en álgebra lineal y optimización, los tres grupos se denominan colectivamente la forma del *espacio de variación* (EV) de las ecuaciones discretizadas:

$$\begin{array}{ll} \{\mathbf{K}_r\}: & \mathbf{g} = \mathbf{A}\mathbf{v} \\ \{\mathbf{C}\} \equiv \{\mathbf{C}_f, \mathbf{C}_g\}: & \mathbf{f} = \mathbf{S}\mathbf{g} + \mathbf{f}^0, \quad \mathbf{g} = \mathbf{C}\mathbf{f} + \mathbf{g}^0 \\ \{\mathbf{E}_r\}: & \mathbf{A}^T \mathbf{f} = \mathbf{p} \end{array} \quad (1)$$

Las siguientes matrices aparecen en (1).

- A** La *matriz de conexión*, que tiene dimensiones $n_g \times n_v$. En la literatura **A** se llama también matriz geométrica, matriz de ensamblaje, matriz de topología y matriz de deformación-desplazamiento. Como en la versión DCE los movimientos rígidos han sido explícitamente eliminados de **v**, la matriz **A** tiene *rango completo* n_v . Esta matriz es cuadrada si la estructura es isostática ($n_g = n_f = n_v$) y rectangular (con más filas que columnas) si la estructura es hiperestática.
- A^T** La *matriz de equilibrio*, que es la transpuesta de la matriz de conexión y tiene el mismo rango.
- S = C⁻¹** La *matriz de rigidez material*, de dimensiones $n_f \times n_f \equiv n_g \times n_g$, que relaciona las fuerzas interiores con las deformaciones de los miembros. Esta matriz es cuadrada, simétrica positiva-definida y diagonal de bloque (al nivel de elementos). Como es positiva definida tiene rango completo $n_f = n_g$.
- C = S⁻¹** La *matriz de conformidad* $n_g \times n_g \equiv n_f \times n_f$ (*compliance matrix*), que relaciona las deformaciones de miembros con los esfuerzos internos. Como en el caso de su inversa, **C** es cuadrada, simétrica positiva-definida y diagonal de bloque al nivel de elementos.

Las matrices **S** y **C** se identifican a veces con los nombres de matrices de rigidez y flexibilidad elementales, respectivamente, en la literatura anterior a 1970.

Las combinaciones de las matrices y vectores que aparecen frecuentemente, y por tanto merecen identificación especial, son

$$\mathbf{K} = \mathbf{A}^T \mathbf{S} \mathbf{A}, \quad \mathbf{F} = \mathbf{K}^{-1}, \quad \mathbf{p}^0 = \mathbf{A}^T \mathbf{f}^0, \quad \mathbf{p}^* = \mathbf{p} - \mathbf{p}^0 \quad (2)$$

K es la matriz de *rigidez de la estructura* o, simplemente, matriz de rigidez, que tiene dimensiones $n_v \times n_v$ y rango completo. Como **S** es simétrica, también lo es **K**. La matriz inversa **F**, que existe como consecuencia de que **S** y **A** tienen rango completo, es la matriz de *flexibilidad de la estructura*. El vector **p**⁰ agrupa fuerzas nodales iniciales. Finalmente, **p**^{*} se llama vector de fuerzas nodales efectivas.

Típicamente las matrices **A**, **S** y **K** tienen una configuración esparcida. La Figura 1 ilustra el esquema de esparcidad para una estructura regular bidimensional con 10 nodos libres y 17 elementos.

En lo que sigue los símbolos **I** y **O** denotan la matriz de identidad y la matriz nula, respectivamente, de dimensiones apropiadas.

La condición de invariancia energética que correlaciona las energías externas e internas medidas desde el estado de deformaciones nulas (**g** = **0**, **v** = **0**) es

$$\frac{1}{2}(\mathbf{p} + \mathbf{p}^0)^T \mathbf{v} = \frac{1}{2}(\mathbf{f} + \mathbf{f}^0)^T \mathbf{g} \quad (3)$$

donde el factor $\frac{1}{2}$ no tiene importancia. Se puede verificar que el conjunto de ecuaciones (1) satisface (3) idénticamente.

La formas discretizadas del Principio de Trabajo Virtual $\mathbf{p}^T \delta \mathbf{v} = \mathbf{f}^T \delta \mathbf{g}$ y del Principio de Trabajo Complementario $\mathbf{v}^T \delta \mathbf{p} = \mathbf{g}^T \delta \mathbf{f}$ resultan directamente de (3).

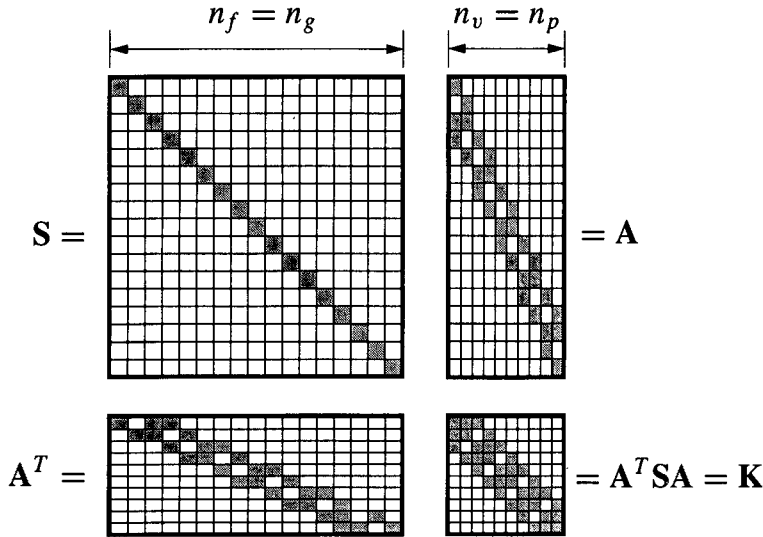


Figura 1. Esparcidad típica de las matrices S , A y K de una estructura bidimensional regular. La representación de Falk para productos matriciales⁹ se usa en la representación mostrada aquí y en las figuras siguientes

Forma de espacio nulo (EN) de las ecuaciones DCE

Una expresión alternativa de las ecuaciones DCE (1), llamada la representación de *espacio nulo* (EN) se basa en la satisfacción *a priori* de las ecuaciones de equilibrio $\{E_r\}$. La solución general de $A^T f = p$ puede expresarse como la suma de las componentes particular y homogénea

$$f = B_0 p + B_1 y \quad (4)$$

donde B_0 y B_1 satisfacen

$$A^T B_0 = B_0^T A = I, \quad A^T B_1 = 0, \quad B_1^T A = 0 \quad (5)$$

Las matrices y vectores que aparecen en estas expresiones son

y Vector de $n_y = n_f - n_v$ fuerzas hiperestáticas (esfuerzos hiperestáticos), definidas implícitamente a través de (4).

B_0 La matriz de influencia $n_f \times n_v$. Como consecuencia de la primera ecuación en (5), B_0 puede interpretarse como una inversa generalizada de A^T , es decir $B_0 A^T B_0 = A^T$.

B_1 La matriz de autodeformaciones $n_f \times n_y$. B_1 contiene (como columnas) una base para el espacio nulo de A^T si $n_f > n_v$. El nombre "matriz de autotensiones" usado por algunos autores es incorrecto, pues $B_1^T f \neq 0$ si $g^0 \neq 0$.

Las condiciones (5) se ilustran gráficamente en la Figura 2. Si la estructura es isostática, $n_v = n_f$, $n_y = 0$, \mathbf{B}_1 y \mathbf{y} son vacías, y $\mathbf{B}_0^T = \mathbf{A}^{-1}$. La Figura 2 indica que aunque la matriz \mathbf{A}^T es esparcida, \mathbf{B}_0 y \mathbf{B}_1 son generalmente llenas. Esta propiedad puede visualizarse reflexionando sobre la interpretación física de (4): cada columna de \mathbf{B}_0 contiene las fuerzas interiores producidas por la aplicación de una componente individual de fuerza nodal, mientras que $\mathbf{y} = \mathbf{0}$. Esa columna es típicamente llena, pues el efecto de una fuerza se propaga a través de la estructura, a menos que se “bloquee” con una selección ingeniosa de las fuerzas hiperestáticas en \mathbf{y} .

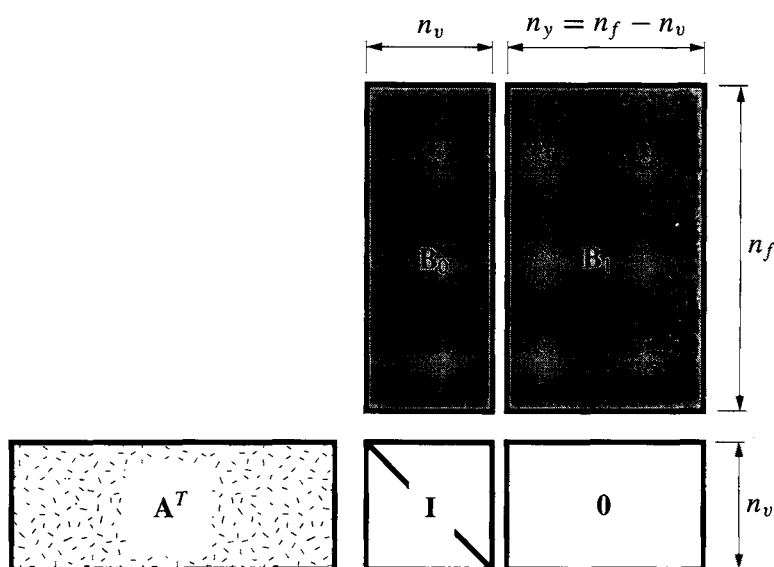


Figura 2. Representación gráfica de las condiciones de vínculo (5) usando la visualización de Falk para el producto matricial. Las marcas internas sugieren que, mientras que \mathbf{A} es una matriz esparcida (Figura 1), \mathbf{B}_0 y \mathbf{B}_1 son generalmente llenas. Las dimensiones relativas son típicas de una estructura de dos dimensiones. La matrix \mathbf{K} tendría las mismas dimensiones marcadas para \mathbf{I}

Aplicando la condición de invarianza de la energía (3) es fácil demostrar que $\mathbf{B}_0^T \mathbf{g} = \mathbf{v}$ y $\mathbf{B}_1^T \mathbf{g} = \mathbf{0}$. La segunda relación justifica el nombre “autodeformación” asignado a \mathbf{B}_1 . Consecuentemente, la forma de espacio nulo (EN) de las ecuaciones discretizadas se escribe

$$\begin{aligned} \{\mathbf{K}_n\}: & \quad \begin{bmatrix} \mathbf{B}_0^T \\ \mathbf{B}_1^T \end{bmatrix} \mathbf{g} = \begin{Bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \\ \{\mathbf{C}\} \equiv \{\mathbf{C}_g, \mathbf{C}_f\}: & \quad \mathbf{g} = \mathbf{C} \mathbf{f} + \mathbf{g}^0, \quad \mathbf{f} = \mathbf{S} \mathbf{g} + \mathbf{f}^0 \\ \{\mathbf{E}_n\}: & \quad \mathbf{f} = \mathbf{B}_0 \mathbf{p} + \mathbf{B}_1 \mathbf{y} \end{aligned} \quad (6)$$

Fletcher¹⁰ discute un método general para obtener \mathbf{B}_0 y \mathbf{B}_1 , dado \mathbf{A} , en el contexto de optimización con restricciones tratadas con el método de multiplicadores de Lagrange. Si $n_y = n_f - n_v > 0$, \mathbf{A} se orlea con una matriz \mathbf{V} de dimensiones $n_f \times n_y$ tal que la matriz orleada tiene rango completo. Entonces

$$[\mathbf{A}, \mathbf{V}]^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_0^T \\ \mathbf{B}_1^T \end{bmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \\ \mathbf{V}^T \end{bmatrix}^{-1} = [\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_1] \quad (7)$$

Como se ilustra en Figura 3, no es necesaria una inversión completa de la matriz orleada.

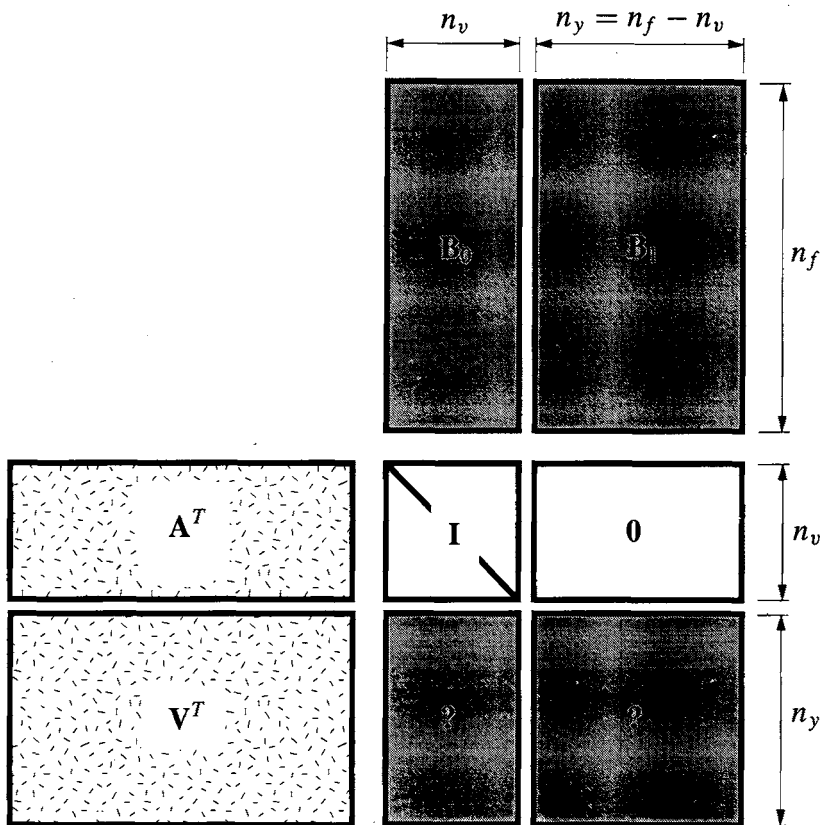


Figura 3. Representación gráfica del esquema de Fletcher (7) para construir \mathbf{B}_0 y \mathbf{B}_1 invirtiendo la matrix \mathbf{A}^T orleada con \mathbf{V}^T . Nótese que el proceso de inversión no es necesario por debajo de la línea n_v . Consecuentemente, los productos $\mathbf{V}^T \mathbf{B}_0$ y $\mathbf{V}^T \mathbf{B}_1$ se dejan indefinidos

El estudio de (7) aclara que \mathbf{B}_0 y \mathbf{B}_1 no son únicas. Puede obtenerse una gran variedad de métodos (discutidos en el libro de Fletcher desde el punto de vista de la optimización computacional) dependiendo de la selección de \mathbf{V} y la representación de (7). Ya se ha advertido que en análisis estructural \mathbf{A} es muy esparcida, mientras que \mathbf{B}_0 y \mathbf{B}_1 no lo son. Por lo tanto es importante escoger \mathbf{V} y una representación implícita (factorizada) de la matriz inversa para mantener la esparcidad.

Inclusión de los desplazamientos nodales conocidos

En los subapartados anteriores todos los desplazamientos nodales impuestos y las fuerzas nodales de reacción correspondientes, han sido explícitamente suprimidos en \mathbf{v} , \mathbf{p} y \mathbf{A} . Esta selección, llamada DCE, tiene ventajas pues da fórmulas simplificadas. Además se reducen las dimensiones de las matrices, aunque esta ventaja se hace gradualmente insignificante a medida que el número de grados de libertad crece.

Alternativamente se pueden retener los desplazamientos nodales conocidos en las ecuaciones discretas. Esta selección se abreviará con el acrónimo DCI por *Desplazamientos Conocidos Incluidos*. En este caso los vectores \mathbf{v} y \mathbf{p} se particionan formalmente de acuerdo a

$$\mathbf{v} = \begin{Bmatrix} \mathbf{v}_0 \\ \mathbf{v}_1 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{p} = \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_0 \\ \mathbf{p}_1 \end{Bmatrix} \quad (8)$$

Aquí el vector \mathbf{v}_1 , de dimensión $n_{v1} < n_v$, agrupa los desplazamientos conocidos, mientras que \mathbf{p}_0 agrupa las fuerzas nodales dadas. Los vectores de incógnitas nodales de tipo desplazamiento y fuerzas son \mathbf{v}_0 y \mathbf{p}_1 , respectivamente. El vector \mathbf{p}_1 agrupa las *fuerzas de reacción*. Debe notarse que en la implementación práctica en computadores digitales, la partición explícita de \mathbf{v} y \mathbf{p} de acuerdo a (8) es rara, pues requeriría reorganizaciones de datos costosas, pero es conveniente para la presentación a través del álgebra matricial.

La partición (8) conduce a la descomposición siguiente de las ecuaciones cinemáticas y de equilibrio

$$\mathbf{g} = \mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{A}_0\mathbf{v}_0 + \mathbf{A}_1\mathbf{v}_1, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{A}_0^T \\ \mathbf{A}_1^T \end{bmatrix} \mathbf{f} = \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_0 \\ \mathbf{p}_1 \end{Bmatrix} \quad (9)$$

donde \mathbf{p}_1 y \mathbf{v}_0 son los vectores de incógnitas. Agrupando todas las ecuaciones discretizadas podemos expresar la forma DCI-EV como

$$\begin{array}{ll} \{K_r\}: & \mathbf{g} = \mathbf{A}_0\mathbf{v}_0 + \mathbf{A}_1\mathbf{v}_1 \\ \{C\} \equiv \{C_f, C_g\}: & \mathbf{f} = \mathbf{S}\mathbf{g} + \mathbf{f}^0, \quad \mathbf{g} = \mathbf{C}\mathbf{f} + \mathbf{g}^0 \\ \{E_r\}: & \begin{bmatrix} \mathbf{A}_0^T \\ \mathbf{A}_1^T \end{bmatrix} \mathbf{f} = \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_0 \\ \mathbf{p}_1 \end{Bmatrix} \end{array} \quad (10)$$

Pasando ahora a la representación de espacio nulo (EN), la descomposición de fuerzas internas (4) cambia a

$$\mathbf{f} = \mathbf{B}_0\mathbf{p}_0 + \mathbf{B}_1\mathbf{y} \quad (11)$$

donde \mathbf{B}_0 y \mathbf{B}_1 satisfacen

$$\mathbf{A}_0^T \mathbf{B}_0 = \mathbf{B}_0^T \mathbf{A}_0 = \mathbf{I}, \quad \mathbf{A}_0^T \mathbf{B}_1 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{A}_1^T \mathbf{B}_0 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{A}_1^T \mathbf{B}_1 = \mathbf{R} \quad (12)$$

Estas condiciones de vínculo se ilustran en la Figura 4. Se observa que la matriz \mathbf{R} podría escogerse con alta esparcidad (como en esa figura) pero es, en general, arbitraria. Introduciendo (11) y (12) en la ecuación de invariancia energética (3) se obtienen las relaciones

$$\mathbf{B}_0^T \mathbf{g} = \mathbf{v}_0, \quad \mathbf{B}_1^T \mathbf{g} = \mathbf{h} = \mathbf{R}^T \mathbf{v}_1, \quad \mathbf{p}_1 = \mathbf{R} \mathbf{y} \quad (13)$$

en las que la última podría también obtenerse premultiplicando ambos lados de (11) por \mathbf{A}_1^T , combinado con $\mathbf{A}_1^T \mathbf{B}_0 = \mathbf{0}$ y $\mathbf{A}_1^T \mathbf{f} = \mathbf{p}_1$. Se ve que \mathbf{y} y \mathbf{h} son energéticamente conjugados, pues $\mathbf{y}^T \mathbf{h} = \mathbf{p}_1^T \mathbf{v}_1$. En consecuencia las componentes de \mathbf{h} pueden interpretarse como "dislocaciones" producidas por la acción individual de las fuerzas hiperestáticas.

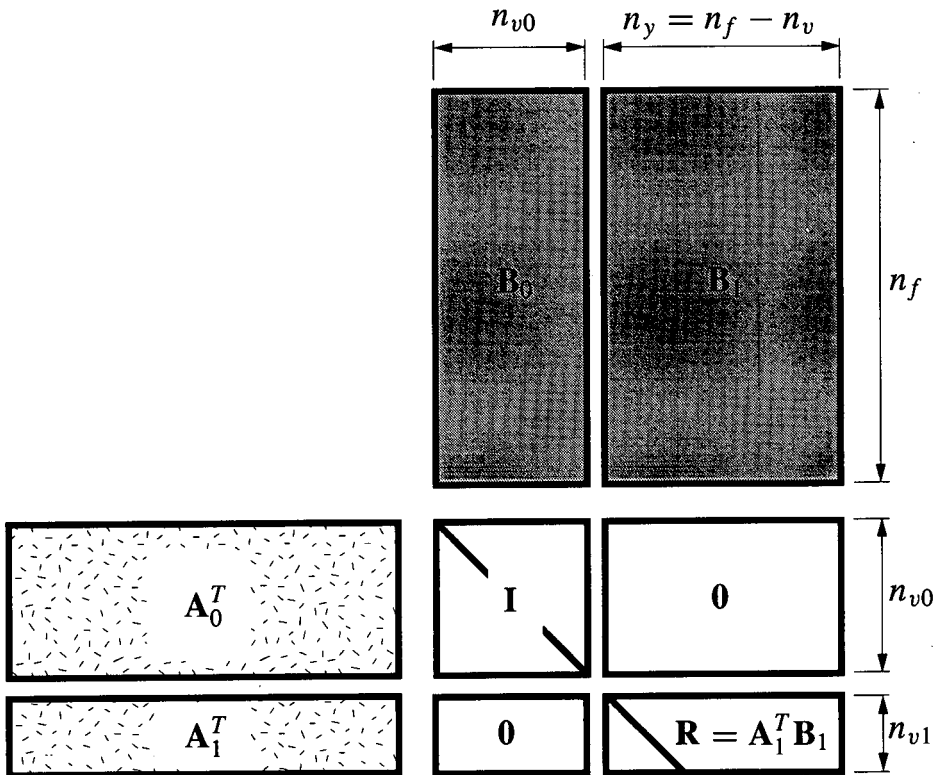


Figura 4. Las matrices \mathbf{A} y \mathbf{B} cuando se incluyen desplazamientos nodales conocidos, \mathbf{v} se particiona de acuerdo a (8) y se imponen las condiciones (12)

Combinando las ecuaciones precedentes, la forma DCI-EN puede presentarse como

$$\begin{array}{ll} \{K_n\}: & \begin{bmatrix} \mathbf{B}_0^T \\ \mathbf{B}_1^T \end{bmatrix} \mathbf{g} = \begin{Bmatrix} \mathbf{v}_0 \\ \mathbf{h} \end{Bmatrix} \\ \{C\} \equiv \{C_g, C_f\}: & \mathbf{g} = \mathbf{C} \mathbf{f} + \mathbf{g}^0, \quad \mathbf{f} = \mathbf{S} \mathbf{g} + \mathbf{f}^0 \\ \{E_n\}: & \mathbf{f} = \mathbf{B}_0 \mathbf{p}_0 + \mathbf{B}_1 \mathbf{y} \end{array} \quad (14)$$

¿Cuándo son las formas DCI preferibles sobre las DCE? Se pueden señalar varios escenarios:

1. Hay desplazamientos nodales impuestos con valor *no nulo*, es decir $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$, en cuyo caso las formas DCE son insuficientes.
2. Se requiere el cálculo de reacciones en apoyos.
3. El rearrreglo de ecuaciones matriciales para eliminar explícitamente las condiciones de los apoyos es inconveniente o costoso. Por ejemplo, si esas matrices están almacenadas en fichas de disco, o distribuidas en memorias locales de una computadora masivamente paralela.
4. Se desea exhibir la dualidad entre las formulaciones basadas en el espacio de variación y el espacio nulo, como se verá en el apartado siguiente.

Dualidad

La dualidad que vincula las representaciones del espacio de variación y del espacio nulo ha sido objeto de un gran volumen de artículos que cubren varias disciplinas. En el contexto presente (AME) esa propiedad puede exponerse considerando las formas DCI definidas por (10) y (14) y observando que las siguientes sustituciones formales convierten una en la otra

$$\mathbf{g} \leftrightarrow \mathbf{f}, \quad \mathbf{g}^0 \leftrightarrow \mathbf{f}^0, \quad \mathbf{S} \leftrightarrow \mathbf{C}, \quad \mathbf{v}_0 \leftrightarrow \mathbf{p}_0, \quad \mathbf{A}_0 \leftrightarrow \mathbf{B}_0, \quad \mathbf{A}_1 \leftrightarrow \mathbf{B}_1, \quad \mathbf{v}_1 \leftrightarrow \mathbf{y}, \quad \mathbf{p}_1 \leftrightarrow \mathbf{h} \quad (15)$$

El esquema se muestra en la Figura 5. La correspondencia $\mathbf{v}_1 \leftrightarrow \mathbf{y}$ y $\mathbf{p}_1 \leftrightarrow \mathbf{h}$ merece comentario. En modelos estructurales en que \mathbf{y} y \mathbf{p}_1 tienen las mismas dimensiones, es posible tomar $\mathbf{y} \equiv \mathbf{p}_1$ (en terminología física: las fuerzas de reacción se toman como hiperestáticas), de donde $\mathbf{R} = \mathbf{A}_1^T \mathbf{B}_1 = \mathbf{I}$ y $\mathbf{h} \equiv \mathbf{v}_1$. En este caso especial las dos correspondencias coinciden: $\mathbf{v}_1 \leftrightarrow \mathbf{p}_1$ y la dualidad es perfecta. Esta selección es generalmente imposible para estructuras arbitrarias en las que n_{v1} es diferente de $n_y = n_f - n_v$ (Figura 4).

Debe observarse que no puede establecerse una correspondencia biunívoca entre las formas DCE (1) y (6). El motivo es que no hay entonces equivalencia del proceso de eliminar columnas de \mathbf{A} y filas de \mathbf{A}^T para imponer desplazamientos nodales conocidos. En consecuencia, la pregunta “¿cuál es la dual de las ecuaciones de rigidez (22) del Método de Desplazamientos?” no tiene sentido. Como corolario, no hay formas EN de estructuras flotantes (ejemplo: aviones o satélites), o en general de estructuras

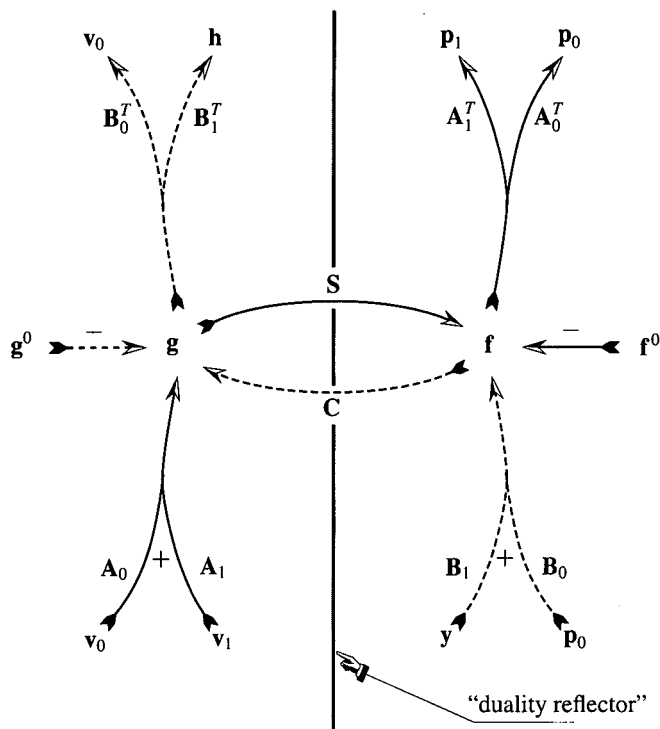


Figura 5. Representación gráfica del esquema de dualidad (15) para formas DCI. Las ecuaciones cinemáticas aparecen a la izquierda y las ecuaciones de equilibrio a la derecha. Las líneas llenas (cortadas) ilustran relaciones usadas principalmente en la forma de espacio de variación (espacio nulo). Las correspondencias \leftrightarrow de (15) resultan de la reflexión del diagrama respecto la línea marcada como "duality reflector"

que están insuficientemente apoyadas, a menos que se añadan condiciones de vínculo suplementarias.

Parametrización de las ecuaciones DCE-EV

Las ecuaciones DCE en el espacio de variación (1) pueden agruparse para formar la ecuación supermatricial

$$\begin{bmatrix} (s_2 + s_3)\mathbf{C} & -s_3\mathbf{I} & -s_2\mathbf{A} \\ -s_3\mathbf{I} & (s_1 + s_3)\mathbf{S} & -s_1\mathbf{SA} \\ -s_2\mathbf{A}^T & -s_1\mathbf{A}^T\mathbf{S} & (1 + s_1 + s_2)\mathbf{K} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \\ \mathbf{v} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -(s_2 + s_3)\mathbf{g}^0 \\ -s_3\mathbf{f}^0 \\ \mathbf{p} - (1 + s_2)\mathbf{A}^T\mathbf{f}^0 \end{Bmatrix} \quad (16)$$

donde s_1 , s_2 y s_3 son tres parámetros escalares libres. En forma compacta

$$\mathbf{Y}\mathbf{w} = \mathbf{r} \quad (17)$$

donde \mathbf{w} y \mathbf{r} agrupan los subvectores de incógnitas y de datos, respectivamente, de (16). La supermatriz de coeficientes \mathbf{Y} es simétrica y tiene dimensiones $n_f + n_g + n_v = 2n_f + n_v$. Se verá más adelante que \mathbf{Y} tiene rango completo si $s_1s_2 + s_2s_3 + s_3s_1 \neq 0$.

La forma particular (16) fue sugerida por la configuración de ecuaciones del MEF generadas por el método de Principios Variacionales Parametrizados (PVPs) mencionado en la introducción. Sin embargo, dentro del contexto del clásico AME, no es necesario usar la formulación variacional. Las tres ecuaciones matriciales de (16) pueden construirse simplemente con la técnica de residuos ponderados en la forma siguiente

$$\begin{aligned} s_2(\mathbf{Cf} - \mathbf{Av} + \mathbf{g}^0) + s_3(\mathbf{Cf} - \mathbf{g} + \mathbf{g}^0) &= 0, \quad \text{o} \quad s_2\{\mathbf{C}_g \star \mathbf{K}_r\} + s_3\{\mathbf{C}_g\}. \\ s_1\mathbf{S}(\mathbf{g} - \mathbf{Av}) + s_3(\mathbf{Sg} - \mathbf{f} + \mathbf{f}^0) &= 0, \quad \text{o} \quad s_1\mathbf{S}\{\mathbf{K}_r\} + s_3\{\mathbf{C}_f\}. \\ s_1\mathbf{A}^T\mathbf{S}(\mathbf{Av} - \mathbf{g}) + s_2\mathbf{A}^T(\mathbf{SAv} - \mathbf{f} + \mathbf{f}^0) \\ + (\mathbf{A}^T\mathbf{SAv} - \mathbf{p} + \mathbf{A}^T\mathbf{f}^0) &= 0, \quad \text{o} \\ s_1\mathbf{A}^T\mathbf{S}\{\mathbf{K}_r\} + s_2\mathbf{A}^T\{\mathbf{C}_f \star \mathbf{K}_r\} + \{\mathbf{E}_r \star \mathbf{C}_f \star \mathbf{K}_r\} \end{aligned} \quad (18)$$

Aquí el símbolo $\{\mathbf{C}_f \star \mathbf{K}_r\}$ denota una combinación de las ecuaciones constitutivas $\mathbf{f} = \mathbf{S}(\mathbf{g} - \mathbf{g}^0)$ y las ecuaciones cinemáticas $\mathbf{g} = \mathbf{Av}$ y similarmente para los otros símbolos. La forma particular de ponderación (18) se escoge de modo que la supermatriz (16) sea *simétrica* para cualquier combinación de los parámetros libres.

Solución paramétrica y especializaciones

Si se cumple la condición (21), la inversa de la supermatriz en (17) viene dada por

$$\mathbf{Y}^{-1} = \begin{bmatrix} q_1\mathbf{SQS} - \mathbf{S} & q_2\mathbf{SQ} - \mathbf{I} & \mathbf{SAK}^{-1} \\ q_2\mathbf{QS} - \mathbf{I} & q_3\mathbf{Q} & \mathbf{AK}^{-1} \\ \mathbf{K}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{S} & \mathbf{K}^{-1}\mathbf{A}^T & \mathbf{K}^{-1} \end{bmatrix} \quad (19)$$

donde $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T = \mathbf{AK}^{-1}\mathbf{A}^T = \mathbf{AFA}^T$ y

$$q_1 = 2 + \frac{s_1 + s_3}{s_1s_2 + s_2s_3 + s_3s_1}, \quad q_2 = 2 + \frac{s_3}{s_1s_2 + s_2s_3 + s_3s_1}, \quad q_3 = 1 + \frac{s_2 + s_3}{s_1s_2 + s_2s_3 + s_3s_1} \quad (20)$$

Estos coeficientes existen si

$$s_{det} = s_1s_2 + s_2s_3 + s_3s_1 = \det \begin{bmatrix} s_2 + s_3 & -s_3 & -s_2 \\ -s_3 & s_1 + s_3 & -s_1 \\ -s_2 & -s_1 & 1 + s_1 + s_2 \end{bmatrix} \neq 0 \quad (21)$$

Si $s_{det} = 0$, la supermatriz \mathbf{Y} de (16) es singular porque contiene ecuaciones dependientes. La independencia lineal puede recuperarse eliminando esas ecuaciones.

Se obtienen formas especiales de interés práctico o histórico dando valores numéricos a los parametros s_1 , s_2 y s_3 , como se ilustra a continuación.

Tomando $s_1 = s_2 = s_3 = 0$ ($s_{det} = 0$) se obtienen las ecuaciones de rigidez (*stiffness equations*) del Método de Desplazamientos

$$\mathbf{K}\mathbf{v} = \mathbf{p} - \mathbf{A}^T \mathbf{f}^0 = \mathbf{p} - \mathbf{p}^0 = \mathbf{p}^* \quad (22)$$

El Método de Rigidez Directo (MRD) es una implementación eficiente del ensamblaje de la matriz de rigidez estructural como suma sobre los elementos

$$\mathbf{K} = \sum_e (\mathcal{L}^{(e)})^T (\mathbf{A}^{(e)})^T \mathbf{S}^{(e)} \mathbf{A}^{(e)} \mathcal{L}^{(e)} = \sum_e (\mathcal{L}^{(e)})^T \mathbf{K}^{(e)} \mathcal{L}^{(e)} \quad (23)$$

donde e indica un elemento particular, $\mathbf{A}^{(e)}$, $\mathbf{S}^{(e)}$ y $\mathbf{K}^{(e)}$ corresponden a \mathbf{A} , \mathbf{S} y \mathbf{K} , respectivamente, al nivel del elemento y $\mathcal{L}^{(e)}$ son matrices de localización con componentes 0 o 1. La expresión (23), que aprovecha al máximo la esparcidad, es más eficiente que el uso ingenuo del triple producto matricial $\mathbf{A}^T \mathbf{S} \mathbf{A}$. El MRD es el procedimiento de ensamblaje usado por la gran mayoría de programas de elementos finitos.

Tomando $s_1 = s_3 = 0$ y $s_2 = -1$ ($s_{det} = 0$) se obtiene el Método de Fuerzas y Desplazamientos, a veces llamado el Método Combinado en la literatura anterior a 1970

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{C} & \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{v} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{g}^0 \\ \mathbf{p} \end{Bmatrix} \quad (24)$$

Tomando $s_2 = s_3 = 0$ y $s_1 = -1$ ($s_{det} = 0$) se llega al Método de Deformaciones y Desplazamientos

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{S} & \mathbf{A}\mathbf{S} \\ \mathbf{S}\mathbf{A}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{g} \\ \mathbf{v} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{p}^* \end{Bmatrix} \quad (25)$$

Tomando $s_1 = 0$ y $s_3 = -s_2 = 1$ ($s_{det} = 1$) se obtiene el Método de Fuerzas, Deformaciones y Desplazamientos

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{A} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{S} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \\ \mathbf{v} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{f}^0 \\ \mathbf{p} \end{Bmatrix} \quad (26)$$

Invirtiendo los signos de los s_i se obtienen formas equivalentes a (24)–(26).

Usando la inversión explícita (19) y el vector de datos de (16) se obtiene la solución general

$$\boxed{\mathbf{z} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \\ \mathbf{v} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{S}(\mathbf{g} - \mathbf{g}^0) \\ \mathbf{A}\mathbf{v} \\ \mathbf{K}^{-1}\mathbf{p}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{S}(\mathbf{A}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{p}^* - \mathbf{g}^0) \\ \mathbf{A}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{p}^* \\ \mathbf{K}^{-1}\mathbf{p}^* \end{Bmatrix}} \quad (27)$$

Esta solución es independiente de los parámetros libres, como puede esperarse en razón de la construcción (18). Más aun, como resultado de cancelaciones, (27) mantiene

su validez si $s_{det} = 0$, por ejemplo en (22), (24) y (25). En el apartado **Elementos Finitos Mixtos d-Conectados** se verá que esta independencia se extiende a ciertas clases de elementos, pero no al caso general.

Las “sensibilidades” siguientes son importantes en algunas aplicaciones, tales como optimización de miembros estructurales

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{p}} = \mathbf{K}^{-1} = \mathbf{F}, \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{f}^0} = -\mathbf{A}^T, \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{g}^0} = \mathbf{A}^T \mathbf{S}, \quad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{p}} = \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{F}, \quad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{g}^0} = \mathbf{S} \mathbf{Q} \mathbf{S} - \mathbf{S}}$$

(28)

Parametrización de las ecuaciones EV-DCI

De acuerdo a (8) la matriz de rigidez estructural \mathbf{K} se particiona en la forma siguiente

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{00} & \mathbf{K}_{01} \\ \mathbf{K}_{10} & \mathbf{K}_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_0^T \mathbf{S} \mathbf{A}_0 & \mathbf{A}_0^T \mathbf{S} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_1^T \mathbf{S} \mathbf{A}_0 & \mathbf{A}_1^T \mathbf{S} \mathbf{A}_1 \end{bmatrix} \quad (29)$$

Las ecuaciones matriciales parametrizadas (16) se convierten en

$$\begin{bmatrix} (s_2 + s_3)\mathbf{C} & -s_3\mathbf{I} & -s_2\mathbf{A}_0 & -s_2\mathbf{A}_1 \\ -s_3\mathbf{I} & (s_1 + s_3)\mathbf{S} & -s_1\mathbf{S}\mathbf{A}_0 & -s_1\mathbf{S}\mathbf{A}_1 \\ -s_2\mathbf{A}_0^T & -s_1\mathbf{A}_0^T\mathbf{S} & s_K\mathbf{K}_{00} & s_K\mathbf{K}_{01} \\ -s_2\mathbf{A}_1^T & -s_1\mathbf{A}_1^T\mathbf{S} & s_K\mathbf{K}_{10} & s_K\mathbf{K}_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \\ \mathbf{v}_0 \\ \mathbf{v}_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -(s_2 + s_3)\mathbf{g}^0 \\ -s_3\mathbf{f}^0 \\ \mathbf{p}_0 - (1 + s_2)\mathbf{A}_0^T\mathbf{f}^0 \\ \mathbf{p}_1 - (1 + s_2)\mathbf{A}_1^T\mathbf{f}^0 \end{Bmatrix} \quad (30)$$

donde se abrevia $s_K = 1 + s_1 + s_2$. Transfiriendo los términos conocidos al segundo miembro se llega al sistema

$$\begin{bmatrix} (s_2 + s_3)\mathbf{C} & -s_3\mathbf{I} & -s_2\mathbf{A}_0 & \mathbf{0} \\ -s_3\mathbf{I} & (s_1 + s_3)\mathbf{S} & -s_1\mathbf{S}\mathbf{A}_0 & \mathbf{0} \\ -s_2\mathbf{A}_0^T & -s_1\mathbf{A}_0^T\mathbf{S} & s_K\mathbf{K}_{00} & \mathbf{0} \\ -s_2\mathbf{A}_1^T & -s_1\mathbf{A}_1^T\mathbf{S} & s_K\mathbf{K}_{10} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \\ \mathbf{v}_0 \\ \mathbf{p}_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -(s_2 + s_3)\mathbf{g}^0 + s_2\mathbf{A}_1\mathbf{v}_1 \\ -s_3\mathbf{f}^0 + s_1\mathbf{S}\mathbf{A}_1\mathbf{v}_1 \\ \mathbf{p}_0 - (1 + s_2)\mathbf{A}_0^T\mathbf{f}^0 - s_K\mathbf{K}_{01}\mathbf{v}_1 \\ -(1 + s_2)\mathbf{A}_1^T\mathbf{f}^0 - s_K\mathbf{K}_{11}\mathbf{v}_1 \end{Bmatrix} \quad (31)$$

Poniendo $s_1 = s_2 = s_3 = 0$ se obtiene inmediatamente la ecuación que proporciona las incógnitas \mathbf{v}_0

$$\mathbf{K}_{00}\mathbf{v}_0 = \mathbf{p}_0 - \mathbf{A}_0^T\mathbf{f}^0 - \mathbf{K}_{01}\mathbf{v}_1 = \mathbf{p}_0 - \mathbf{A}_0^T(\mathbf{f}^0 + \mathbf{S}\mathbf{A}_1\mathbf{v}_1) = \mathbf{p}_0^* \quad (32)$$

donde \mathbf{p}_0^* es un vector de fuerzas nodales efectivas que tiene en cuenta los efectos de pretensado \mathbf{f}^0 y desplazamientos impuestos \mathbf{v}_1 . Resolviendo y substituyendo se obtiene la solución

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \\ \mathbf{v} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \\ \mathbf{v}_0 \\ \mathbf{v}_1 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{S}\mathbf{g} + \mathbf{f}^0 \\ \mathbf{A}_0\mathbf{v}_0 + \mathbf{A}_1\mathbf{v}_1 \\ \mathbf{K}_{00}^{-1}\mathbf{p}_0^* \\ \mathbf{v}_1 \end{array} \right\} \quad (33)$$

Las reacciones pueden obtenerse de la última ecuación matricial en (31)

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{K}_{10}\mathbf{v}_0 + \mathbf{K}_{11}\mathbf{v}_1 + \mathbf{A}_1^T\mathbf{f}^0 \quad (34)$$

Las derivadas de sensibilidad interesantes son

$$\left\{ \begin{array}{lll} \frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial \mathbf{p}_0} = \mathbf{K}_{00}^{-1}, & \frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial \mathbf{v}_1} = -\mathbf{K}_{00}^{-1}\mathbf{K}_{01}, & \frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial \mathbf{g}^0} = \mathbf{K}_{00}^{-1}\mathbf{A}_0^T\mathbf{S} \\ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{p}_0} = \mathbf{S}\mathbf{A}_0\mathbf{K}_{00}^{-1}, & \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{v}_1} = \mathbf{S}\mathbf{A}_0\mathbf{K}_{00}^{-1}\mathbf{K}_{01}, & \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{g}^0} = \mathbf{S}\mathbf{Q}_{00}\mathbf{S} - \mathbf{S} \end{array} \right\} \quad (35)$$

donde $\mathbf{Q}_{00} = \mathbf{A}_0\mathbf{K}_{00}^{-1}\mathbf{A}_0^T$.

La modificación de otros métodos de solución, como (24) a (26), para reconocer la presencia de desplazamientos impuestos, requiere la selección de los parámetros adecuados como se ha explicado en el apartado anterior.

Formas simétricas DCE-EN

La substitución formal de (4) en (16), seguida de la premultiplicación de la primera ecuación matricial por \mathbf{B}_1^T para restaurar la simetría, conduce al sistema parametrizado EN de dimensión $(n_f - n_v) + n_g + n_v = 2n_f$

$$\left[\begin{array}{ccc} (s_2 + s_3)\mathbf{F}_{11} & -s_3\mathbf{B}_1^T & \mathbf{0} \\ -s_3\mathbf{B}_1 & (s_1 + s_3)\mathbf{S} & -s_1\mathbf{S}\mathbf{A} \\ \mathbf{0} & -s_1\mathbf{A}^T\mathbf{S} & (1 + s_1 + s_2)\mathbf{K} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{y} \\ \mathbf{g} \\ \mathbf{v} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} -(s_2 + s_3)(\mathbf{F}_{10}\mathbf{p} + \mathbf{B}_1^T\mathbf{g}^0) \\ s_3(\mathbf{B}_0\mathbf{p} - \mathbf{f}^0) \\ (1 + s_2)(\mathbf{p} - \mathbf{A}^T\mathbf{f}^0) \end{array} \right\} \quad (36)$$

donde $\mathbf{F}_{11} = \mathbf{B}_1^T\mathbf{C}\mathbf{B}_1$ y $\mathbf{F}_{10} = \mathbf{B}_1^T\mathbf{C}\mathbf{B}_0$. El sistema (36) es singular, pues contiene ecuaciones hiperestáticas superfluas. Para reducirlo por eliminación de \mathbf{v} se hace $s_1 = 0$ y $s_2 = -1$, mientras que $s = s_3$ se mantiene como parámetro libre

$$\left[\begin{array}{cc} (s-1)\mathbf{F}_{11} & -s\mathbf{B}_1^T \\ -s\mathbf{B}_1 & s\mathbf{S} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{y} \\ \mathbf{g} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} (1-s)(\mathbf{F}_{10}\mathbf{p} + \mathbf{B}_1^T\mathbf{g}^0) \\ s(\mathbf{B}_0\mathbf{p} - \mathbf{f}^0) \end{array} \right\} \quad (37)$$

Esta es una forma de dimensión $n_y + n_v$ con un único parámetro libre, que representa una combinación ponderada de ecuaciones cinemáticas y constitutivas. Se pueden obtener dos especializaciones importantes tomando $s = 0$ y $s = 1$

$$-\mathbf{F}_{11}\mathbf{y} = \mathbf{F}_{10}\mathbf{p} + \mathbf{B}_1^T \mathbf{g}^0 \quad (38)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{B}_1^T \\ -\mathbf{B}_1 & \mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{g} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_0\mathbf{p} - \mathbf{f}^0 \end{Bmatrix} \quad (39)$$

La ecuación (38) representa el viejo Método de Fuerzas Hiperestáticas, también llamado Método de Flexibilidad o, simplemente, "Método de Fuerzas" en la literatura de AME. (El último nombre es un poco ambiguo, pues como se verá seguidamente, hay otras variantes no simétricas.) La ecuación (39) representa el Método de Fuerzas Hiperestáticas y Deformaciones. La eliminación explícita de \mathbf{g} en este método da (38). Usando esta ecuación como base se deduce la contribución $\mathbf{B}_1\mathbf{y}$ de las fuerzas hiperestáticas a las fuerzas internas en (40)

$$\mathbf{B}_1\mathbf{y} = -\mathbf{G}(\mathbf{C}\mathbf{B}_0\mathbf{p} + \mathbf{g}^0) \quad (40)$$

donde $\mathbf{G} = \mathbf{B}_1\mathbf{F}_{11}^{-1}\mathbf{B}_1^T$ es una matriz simétrica de dimensiones $n_f \times n_f$, que desaparece si la estructura es isostática, pues entonces $n_f = 0$. La substitución en las otras ecuaciones proporciona la solución completa

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \\ \mathbf{v} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (\mathbf{I} - \mathbf{G}\mathbf{C})\mathbf{B}_0\mathbf{p} - \mathbf{G}\mathbf{g}^0 \\ \mathbf{C}(\mathbf{I} - \mathbf{G}\mathbf{C})\mathbf{B}_0\mathbf{p} + (\mathbf{I} - \mathbf{G})\mathbf{g}^0 \\ \mathbf{B}_0^T\mathbf{C}(\mathbf{I} - \mathbf{G})\mathbf{C}\mathbf{B}_0\mathbf{p} + \mathbf{B}_0^T(\mathbf{I} - \mathbf{G})\mathbf{g}^0 \end{Bmatrix} \quad (41)$$

Las derivadas de sensibilidad interesantes son

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{p}} = \mathbf{B}_0^T\mathbf{C}(\mathbf{I} - \mathbf{G})\mathbf{C}\mathbf{B}_0, \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{g}^0} = \mathbf{B}_0^T\mathbf{C}(\mathbf{I} - \mathbf{G}), \quad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{p}} = (\mathbf{I} - \mathbf{G}\mathbf{C})\mathbf{B}_0, \quad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{g}^0} = -\mathbf{G} \quad (42)$$

Comparando éstas con (28) vemos que

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}^{-1} = \mathbf{B}_0^T\mathbf{C}(\mathbf{I} - \mathbf{G})\mathbf{C}\mathbf{B}_0, \quad \mathbf{S}\mathbf{A}\mathbf{F} = (\mathbf{I} - \mathbf{G})\mathbf{B}_0, \quad \mathbf{G} = \mathbf{S} - \mathbf{S}\mathbf{Q}\mathbf{S} \quad \text{etc.} \quad (43)$$

Es posible obtener un esquema efectivo para acelerar los métodos de espacio nulo cuando muy pocas de las fuerzas aplicadas, digamos \hat{n}_v , en \mathbf{p} son diferentes de cero. Si estas se incluyen en $\hat{\mathbf{p}}$, $\mathbf{B}_0\mathbf{p}_0$ puede reducirse a $\hat{\mathbf{B}}_0\hat{\mathbf{p}}$, en que $\hat{\mathbf{B}}_0$ tiene solamente $\hat{n}_v \ll n_v$ columnas.

Formas simétricas DCI-EN

La manera más rápida para obtener formas simétricas parametrizadas DCI de tipo espacio nulo (EN) es substituyendo (4) en (31) y simetrizando. Aquí, sin embargo, usaremos una técnica alternativa para ilustrar la aplicación de la dualidad (que no es posible para formas DCE). Sustituyendo las sustituciones formales (15) en (30) se obtiene

$$\begin{bmatrix} (s_2 + s_3)\mathbf{S} & -s_3\mathbf{I} & -s_2\mathbf{B}_0 & -s_2\mathbf{B}_1 \\ -s_3\mathbf{I} & (s_1 + s_3)\mathbf{C} & -s_1\mathbf{CB}_0 & -s_1\mathbf{CB}_1 \\ -s_2\mathbf{B}_0^T & -s_1\mathbf{B}_0^T\mathbf{C} & s_F\mathbf{F}_{00} & s_F\mathbf{F}_{01} \\ -s_2\mathbf{B}_1^T & -s_1\mathbf{B}_1^T\mathbf{C} & s_F\mathbf{F}_{10} & s_F\mathbf{F}_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{g} \\ \mathbf{f} \\ \mathbf{p}_0 \\ \mathbf{y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -(s_2 + s_3)\mathbf{f}^0 \\ -s_3\mathbf{g}^0 \\ \mathbf{v}_0 - (1 + s_2)\mathbf{B}_0^T\mathbf{g}^0 \\ \mathbf{R}^T\mathbf{v}_1 - (1 + s_2)\mathbf{B}_1^T\mathbf{g}^0 \end{Bmatrix} \quad (44)$$

donde $s_F = 1 + s_1 + s_2 = s_K$ y las duales de las particiones de rigidez son las flexibilidades

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{00} &\rightarrow \mathbf{F}_{00} = \mathbf{B}_0^T\mathbf{CB}_0, \quad \mathbf{K}_{01} \rightarrow \mathbf{F}_{01} = \mathbf{B}_0^T\mathbf{CB}_1 \\ \mathbf{K}_{10} &\rightarrow \mathbf{F}_{10} = \mathbf{B}_1^T\mathbf{CB}_0, \quad \mathbf{K}_{11} \rightarrow \mathbf{F}_{11} = \mathbf{B}_1^T\mathbf{CB}_1 \end{aligned} \quad (45)$$

Para eliminar \mathbf{f} , hacemos $s_1 = 0$, $s_3 = 0$ y $s_2 = -s$

$$\begin{bmatrix} -s\mathbf{S} & s\mathbf{B}_0 & s\mathbf{B}_1 \\ s\mathbf{B}_0^T & (1-s)\mathbf{F}_{00} & (1-s)\mathbf{F}_{01} \\ s\mathbf{B}_1^T & (1-s)\mathbf{F}_{10} & (1-s)\mathbf{F}_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{g} \\ \mathbf{p}_0 \\ \mathbf{y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} s\mathbf{f}^0 \\ \mathbf{v}_0 - (1-s)\mathbf{B}_0^T\mathbf{g}^0 \\ \mathbf{R}\mathbf{v}_1 - (1-s)\mathbf{B}_1^T\mathbf{g}^0 \end{Bmatrix} \quad (46)$$

Ésta se puede transformar usando la identidad $\mathbf{v}_0 = \mathbf{F}_{00}\mathbf{p}_0 + \mathbf{F}_{01}\mathbf{y} + \mathbf{B}_0^T\mathbf{g}^0$ y reorganizando las incógnitas

$$\begin{bmatrix} (s-1)\mathbf{F}_{11} & -s\mathbf{B}_1^T & \mathbf{R}^T \\ -s\mathbf{B}_1 & s\mathbf{S} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{g} \\ \mathbf{v}_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (1-s)(\mathbf{F}_{10}\mathbf{p}_0 + \mathbf{B}_1^T\mathbf{g}^0) \\ s(\mathbf{B}_0\mathbf{p}_0 - \mathbf{f}^0) \\ \mathbf{p}_1 \end{Bmatrix} \quad (47)$$

que es la versión DCI de la forma (37). Haciendo $s = 0$ se obtiene inmediatamente la ecuación matricial del Método de Fuerzas Hiperestáticas

$$-\mathbf{F}_{11}\mathbf{y} = \mathbf{F}_{10}\mathbf{p}_0 + \mathbf{B}_1^T\mathbf{g}^0 - \mathbf{R}^T\mathbf{v}_1 \quad (48)$$

que es (38) corregida con el efecto de desplazamientos impuestos no nulos a través del "vector de dislocaciones" $\mathbf{h} = \mathbf{R}^T\mathbf{v}_1$. Los vectores \mathbf{f} , \mathbf{g} y \mathbf{v}_0 pueden ahora calcularse usando las ecuaciones primitivas, mientras que el vector de reacciones puede recuperarse de $\mathbf{p}_1 = \mathbf{A}_1^T\mathbf{f} = \mathbf{R}\mathbf{y}$.

Haciendo $s = 1$ en (47) se llega a la versión DCI del Método de Fuerzas Hiperestáticas y Deformaciones (39).

Formas no simétricas

Consideremos nuevamente la forma parametrizada DCE-EV (16). Escalando las tres ecuaciones matriciales con \mathbf{W}_f , \mathbf{W}_g y \mathbf{W}_v , respectivamente, se obtiene

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}_f & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{W}_g & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{W}_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (s_2 + s_3)\mathbf{C} & -s_3\mathbf{I} & -s_2\mathbf{A} \\ -s_3\mathbf{I} & (s_1 + s_3)\mathbf{S} & -s_1\mathbf{SA} \\ -s_2\mathbf{A}^T & -s_1\mathbf{A}^T\mathbf{S} & s_K\mathbf{K} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \\ \mathbf{v} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -(s_2 + s_3)\mathbf{W}_f\mathbf{g}^0 \\ -s_3\mathbf{W}_g\mathbf{f}^0 \\ \mathbf{W}_v(\mathbf{p} - (1 + s_2)\mathbf{A}\mathbf{f}^0) \end{Bmatrix} \quad (49)$$

Este sistema es generalmente no simétrico. Una selección apropiada para las matrices de escala es $\mathbf{W}_f = \mathbf{B}_1^T$, $\mathbf{W}_g = \mathbf{B}_1^T\mathbf{C}$ y $\mathbf{W}_v = \mathbf{I}$. Como consecuencia de la condición de ortogonalidad $\mathbf{B}_1^T\mathbf{A} = \mathbf{0}$ esta selección anula dos submatrices

$$\begin{bmatrix} (s_2 + s_3)\mathbf{B}_1^T\mathbf{C} & -s_3\mathbf{B}_1^T & \mathbf{0} \\ -s_3\mathbf{B}_1^T\mathbf{C} & (s_1 + s_3)\mathbf{B}_1^T & \mathbf{0} \\ -s_2\mathbf{A}^T & -s_1\mathbf{A}^T\mathbf{S} & s_K\mathbf{K} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \\ \mathbf{v} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -(s_2 + s_3)\mathbf{B}_1^T\mathbf{g}^0 \\ s_3\mathbf{B}_1^T\mathbf{g}^0 \\ \mathbf{p} - (1 + s_2)\mathbf{p}^0 \end{Bmatrix} \quad (50)$$

Tomando ahora $s_1 = s_3 = 0$ y $s_2 = -1$, todas las submatrices que multiplican \mathbf{g} y \mathbf{v} se anulan y (50) se reduce a

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{B}_1^T\mathbf{C} \\ \mathbf{A}^T \end{bmatrix} \mathbf{f} = \begin{Bmatrix} \mathbf{B}_1^T\mathbf{g}^0 \\ \mathbf{p} \end{Bmatrix} \quad (51)$$

Tomando $s_2 = s_3 = 0$ y $s_1 = -1$, todas las submatrices que multiplican \mathbf{f} y \mathbf{v} se anulan y (50) se reduce a

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{B}_1^T \\ \mathbf{A}^T\mathbf{S} \end{bmatrix} \mathbf{g} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{p} - \mathbf{p}^0 \end{Bmatrix} \quad \text{or} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1^T \\ \mathbf{A}^T\mathbf{S} \end{bmatrix} \mathbf{g} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{p} - \mathbf{p}^0 \end{Bmatrix} \quad (52)$$

Las ecuaciones (51) y (52) son versiones no simétricas del Método de Fuerzas y del Método de Deformaciones, respectivamente. Estas formas combinan selectivamente ecuaciones de los espacios de variación y espacios nulos. Por ejemplo, (51) combina $\mathbf{A}^T\mathbf{f} = \mathbf{p}$ y $\mathbf{B}_1^T\mathbf{g} = \mathbf{0}$ con $\mathbf{g} = \mathbf{C}\mathbf{f} + \mathbf{g}^0$.

Tomando $s_1 = s_2 = s_3 = 0$ no da nada nuevo, pues simplemente se recupera el Método de Desplazamientos (22).

Las versiones DCI son

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{B}_1^T\mathbf{C} \\ \mathbf{A}_0^T \end{bmatrix} \mathbf{f} = \begin{Bmatrix} \mathbf{B}_1^T\mathbf{g}^0 - \mathbf{h} \\ \mathbf{p}_0 \end{Bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1^T \\ \mathbf{A}_0^T\mathbf{S} \end{bmatrix} \mathbf{g} = \begin{Bmatrix} \mathbf{h} \\ \mathbf{p}_0 - \mathbf{A}_0^T\mathbf{f}^0 \end{Bmatrix} \quad (53)$$

en las que $\mathbf{h} = \mathbf{R}\mathbf{v}_1$. Estas pueden obtenerse rápidamente como casos especiales de la forma parametrizada

$$\begin{bmatrix} (s_2 + s_3)\mathbf{B}_1^T \mathbf{C} & -s_3\mathbf{B}_1^T & \mathbf{0} & -s_2\mathbf{R}^T \\ -s_3\mathbf{B}_1^T \mathbf{C} & (s_1 + s_3)\mathbf{B}_1^T & \mathbf{0} & -s_1\mathbf{R}^T \\ -s_2\mathbf{A}_0^T & -s_1\mathbf{A}_0^T \mathbf{S} & s_K \mathbf{K}_{00} & s_K \mathbf{K}_{01} \\ -s_2\mathbf{A}_1^T & -s_1\mathbf{A}_1^T \mathbf{S} & s_K \mathbf{K}_{10} & s_K \mathbf{K}_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \\ \mathbf{v}_0 \\ \mathbf{v}_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -(s_2 + s_3)\mathbf{B}_1^T \mathbf{g}^0 \\ s_3\mathbf{B}_1^T \mathbf{g}^0 \\ \mathbf{p}_0 - (1 + s_2)\mathbf{A}_0^T \mathbf{f}^0 \\ \mathbf{p}_1 - (1 + s_2)\mathbf{A}_1^T \mathbf{f}^0 \end{Bmatrix} \quad (54)$$

Tomando las duales de (53) se obtiene

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{A}_1^T \mathbf{S} \\ \mathbf{B}_0^T \end{bmatrix} \mathbf{g} = \begin{Bmatrix} \mathbf{A}_1^T \mathbf{f}^0 - \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{v}_0 \end{Bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^T \\ \mathbf{B}_0^T \mathbf{C} \end{bmatrix} \mathbf{f} = \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{v}_0 - \mathbf{B}_0^T \mathbf{g}^0 \end{Bmatrix} \quad (55)$$

que no son útiles, en razón de la presencia de incógnitas en el segundo miembro.

Cualquiera de estas formas puede simetrizarse premultiplicando por la transpuesta de la matriz de coeficientes. Este procedimiento no es recomendable, pues se empeora la condición numérica y la esparcidad de esa matriz.

Aparición de métodos específicos

Los primeros usos de las formas matriciales del Método de Fuerzas (38) y del Método de Desplazamientos (22) no son trazables históricamente con certitud, pero probablemente ocurrieron a comienzos de la década de 1930 como se discute en el apartado final. La aplicación que motivó los desarrollos durante el período 1945-55 fue el análisis computacional de nuevas formas de ala (en flecha y delta) para aviones comerciales y militares.

El primer artículo, en una revista científica, sobre el Método Matricial de Fuerzas para las aplicaciones aeronáuticas ya mencionadas es el de Levy,¹¹ seguido por las publicaciones de Rand,¹² Langefors,¹³ Wehle y Lansing¹⁴ y Argyris y Kelsey.¹⁵ La selección automática de fuerzas hiperestáticas en el Método de Fuerzas (38), usando la eliminación de Gauss-Jordan, fue desarrollada por Denke¹⁶ y Robinson.¹⁷ Este procedimiento está bien explicado en el libro de Przemieniecki,¹⁸ que contiene una bibliografía exhaustiva de publicaciones hasta 1966. Una ráfaga de actividad subsecuente ocurrió en la década 1980-90, focalizada en la construcción de formas esparcidas de la matriz \mathbf{B}_1 .¹⁹⁻²⁴

Las publicaciones originales sobre el Método Matricial de Desplazamientos, también enfocadas inicialmente hacia aplicaciones aeronáuticas, son las de Levy,²⁵ Argyris y Kelsey,¹⁵ y Turner, Clough, Martin y Topp.²⁶ Este último artículo²⁶ lanzó el Método de Elementos Finitos (MEF) en la forma usada corrientemente. El Método de Rigidez Directo o MRD (23) fue desarrollado por Turner y sus colegas en Boeing^{27,28} y hacia 1970 había desplazado al Método de Fuerzas en los programas generales del MEF.

El Método Combinado de Fuerzas y Desplazamientos (24) fue aparentemente mencionado por primera vez por Kosko.^{29,30} No es claro donde fueron publicados originalmente los Métodos Combinados de Deformación y Desplazamiento (25) y Fuerzas, Deformaciones y Desplazamientos (26).

El Método Combinado de Fuerzas Redundantes y Deformaciones (39) es mencionado de pasada por Fraeijs de Veubeke.³¹

La primera publicación en Mecánica Estructural que contiene la forma no simétrica (51) parece ser la de Patnaik y Dayaratnam.³² Una forma similar, con pequeños rearrreglos, ha sido atribuida a Thierauf y Topcu³³ (el autor no ha visto este artículo) por Kaneko y Plemmonds.²¹

Las formas parametrizadas presentadas aquí son originales.

ELEMENTOS FINITOS MIXTOS d -CONECTADOS

Subiendo al segundo escalón de complejidad, se estudian en este apartado modelos de elementos finitos de una estructura lineal y elástica tratada como un cuerpo continuo. Los elementos se desarrollan usando un funcional mixto de tres parámetros libres, en el que pueden variarse independientemente los desplazamientos, las deformaciones y las tensiones. Los elementos se conectan con desplazamientos nodales comunes, mientras que las tensiones y deformaciones son *discontinuas entre elementos*. Para enfocar la exposición, se restringe la atención a la *hiperelasticidad lineal compresible sin deformaciones iniciales*. Un tratamiento comparable de la elasticidad incompresible requiere el uso de un funcional con seis parámetros libres.³⁴

Equaciones del continuo

Consideramos la estructura como un cuerpo de volumen V referido a un sistema $\{x_i\}$, $i = 1, 2, 3$ de coordenadas rectangulares cartesianas. El cuerpo está delimitado por la superficie S con normal unitaria externa $\mathbf{n} \equiv \{n_i\}$. La superficie se descompone en $S : S_u \cup S_t$. Los desplazamientos $\hat{\mathbf{u}} \equiv \{\hat{u}_i\}$ se especifican en S_u , mientras que las fuerzas de superficie $\hat{\mathbf{t}} \equiv \{\hat{t}_i\}$ se prescriben en S_t . Las fuerzas másicas $\mathbf{b} \equiv \{b_i\}$ actúan en el volumen V .

Los tres campos internos desconocidos son: los desplazamientos $\mathbf{u} \equiv \{u_i\}$, las deformaciones $\mathbf{e} \equiv \{e_{ij}\}$ y las tensiones $\boldsymbol{\sigma} \equiv \{\sigma_{ij}\}$. Las fuerzas de superficie en S son $\boldsymbol{\sigma}_n = \mathbf{t} \equiv \{t_i\} = \{\sigma_{ji}n_j\}$ (se supone el criterio de suma de Einstein). Para facilitar la escritura de los funcionales de elasticidad en notación matricial, las tensiones y deformaciones se rearrreglan en la manera usual del MEF formando vectores de seis componentes

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}^T &= [\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \sigma_{12} \quad \sigma_{23} \quad \sigma_{31}] \\ \mathbf{e}^T &= [e_{11} \quad e_{22} \quad e_{33} \quad 2e_{12} \quad 2e_{23} \quad 2e_{31}]\end{aligned}\tag{56}$$

Estos campos están conectados por ecuaciones cinemáticas, constitutivas y de equilibrio interno que, ignorando efectos de deformaciones iniciales, vienen dadas por

$$\mathbf{e} = \mathbf{D}\mathbf{u}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}\mathbf{e}, \quad \mathbf{D}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0}\tag{57}$$

Aquí \mathbf{E} es la matriz tensión-deformación de tamaño 6×6 , que contiene los parámetros elásticos en la manera usual del MEF, \mathbf{D} es el operador diferencial matricial de tamaño

6×3 que conecta los campos de deformaciones y desplazamientos y su transpuesta es la matriz de divergencia tensorial:

$$\mathbf{D}^T = \begin{bmatrix} \partial/\partial x_1 & 0 & 0 & \partial/\partial x_2 & 0 & \partial/\partial x_3 \\ 0 & \partial/\partial x_2 & 0 & \partial/\partial x_1 & \partial/\partial x_3 & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial x_3 & 0 & \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_1 \end{bmatrix} \quad (58)$$

que conecta los campos de tensiones y fuerzas másicas. Las condiciones de contorno son

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} \quad \text{en } S_u, \quad \sigma_n = \mathbf{t} = \hat{\mathbf{t}} \quad \text{en } S_t \quad (59)$$

El funcional mixto parametrizado

El material que sigue ha sido condensado de varios artículos anteriores,¹⁻⁶ a los que puede dirigirse el lector interesado para una explicación más detallada del tema.

En métodos variacionales de aproximación, por supuesto no se trabaja con los campos exactos que satisfacen las ecuaciones de gobierno (57) y (59). Se trabaja en cambio con campos *independientes* (primarios, paternos), que están sujeto a variaciones, y con campos *dependientes* (derivados, descendientes, secundarios, asociados), que no lo están. La aproximación se determina tomando las variaciones con respecto a los campos independientes.

La variación de un campo independientemente se identificará con un tilde superpuesto, por ejemplo $\tilde{\mathbf{u}}$. Un campo dependiente se identificará escribiendo el símbolo de su campo "paterno" (el campo primario del que deriva) como índice. Por ejemplo, los campos de deformaciones y tensiones derivados de los desplazamientos $\tilde{\mathbf{u}}$ son $\mathbf{e}^u = \mathbf{D}\tilde{\mathbf{u}}$ y $\sigma^u = \mathbf{E}\mathbf{e}^u = \mathbf{E}\mathbf{D}\tilde{\mathbf{u}}$. Similarmente $\sigma^e = \mathbf{E}\tilde{\mathbf{e}}$ son las tensiones derivadas del campo $\tilde{\mathbf{e}}$ de variación de deformaciones, mientras que $\mathbf{e}^\sigma = \mathbf{E}^{-1}\tilde{\sigma}$ son deformaciones derivadas del campo $\tilde{\sigma}$ de variación de tensiones. Una ventaja de esta notación es que los símbolos \mathbf{u} , \mathbf{e} y σ pueden reservarse para campos exactos o genéricos.

El Principio Variacional Parametrizado (PVP) que genera los elementos finitos estudiados en esta sección es $\delta\Pi = 0$, en que Π es el funcional

$$\Pi = U - P^c \quad (60)$$

Aquí U es la energía de deformación generalizada^{2,3} que contiene tres parámetros libres s_1 , s_2 y s_3

$$U(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\sigma}, \tilde{\mathbf{e}}) := \frac{1}{2} \int_V \begin{Bmatrix} \tilde{\sigma} \\ \sigma^e \\ \sigma^u \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} (s_2 + s_3)\mathbf{I} & -s_3\mathbf{I} & -s_2\mathbf{I} \\ -s_3\mathbf{I} & (s_1 + s_3)\mathbf{I} & -s_1\mathbf{I} \\ -s_2\mathbf{I} & -s_1\mathbf{I} & (1 + s_1 + s_2)\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{e}^\sigma \\ \tilde{\mathbf{e}} \\ \mathbf{e}^u \end{Bmatrix} dV \quad (61)$$

donde \mathbf{I} es la matriz identidad de dimensiones 6×6 y P^c es el potencial de cargas externas convencional, que suponiendo deformaciones iniciales nulas, es

$$P^c(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \tilde{\mathbf{e}}) = \int_V \mathbf{b}^T \tilde{\mathbf{u}} dV + \int_{S_u} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_n^T (\tilde{\mathbf{u}} - \hat{\mathbf{u}}) dS + \int_{S_t} \hat{\mathbf{t}}^T \tilde{\mathbf{u}} dS \quad (62)$$

en que $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_n = (1 + s_1 + s_2)\boldsymbol{\sigma}_n^u - s_2\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_n - s_1\boldsymbol{\sigma}_n^e$.

Pueden obtenerse funcionales específicos dando valores numéricos a s_1 , s_2 y s_3 . Por ejemplo, el funcional de Hu-Washizu se obtiene con $s_1 = 0$ y $s_3 = -s_2 = 1$. El funcional de Energía Potencial Total, que genera los elementos más comunes en programas del MEF comerciales, se obtiene tomando $s_1 = s_2 = s_3 = 0$.

El funcional (60) es de clase *mixto*. Se obtienen funcionales parametrizados de tipo *híbridos* que conectan fronteras internas con desplazamientos y tensiones reemplazando P^c por ciertos potenciales P^d o P^t , que implementan las condiciones de compatibilidad débil. Estas versiones híbridadas, estudiadas en las referencias mencionadas previamente, no se consideran en este artículo.

Ecuaciones discretizadas de elementos finitos

En los cuatro subapartados siguientes, el “cuerpo de volumen V y superficie S ” se interpretará como un *elemento individual* o un *ensamblaje arbitrario de varios elementos*, según sea necesario. Las funciones de prueba en tensiones, deformaciones y desplazamientos se escriben

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{N}_\sigma \mathbf{f}, \quad \tilde{\mathbf{e}} = \mathbf{N}_e \mathbf{g}, \quad \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{N}_u \mathbf{v} \quad (63)$$

Aquí \mathbf{f} es un vector con n_f componentes de tensiones, \mathbf{g} un vector con n_g componentes de deformaciones y \mathbf{v} es el vector de n_v desplazamientos nodales, mientras que \mathbf{N}_σ , \mathbf{N}_e y \mathbf{N}_u denotan las matrices de funciones de forma correspondientes. Por simplicidad se supondrá que $\mathbf{N}_u \mathbf{v}$ satisface las condiciones de contorno en desplazamientos sobre S_u , en cuyo caso la segunda integral en (62) desaparece.

Los campos derivados vienen dados por $\boldsymbol{\sigma}^e = \mathbf{E} \mathbf{N}_e \mathbf{g}$, $\boldsymbol{\sigma}^u = \mathbf{E} \mathbf{e}^u = \mathbf{E} \mathbf{D} \mathbf{N}_u \mathbf{v} = \mathbf{E} \mathbf{G}_u \mathbf{v}$, $\mathbf{e}^\sigma = \mathbf{E}^{-1} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}^{-1} \mathbf{N}_\sigma \mathbf{f}$ y $\mathbf{e}^u = \mathbf{D} \mathbf{N}_u \mathbf{v} = \mathbf{G}_u \mathbf{v}$ with $\mathbf{G}_u = \mathbf{D} \mathbf{N}_u$. Para uso futuro es conveniente expresar la interpolación de las deformaciones derivadas del campo de desplazamientos mediante la descomposición³⁵ $\mathbf{G}_u = \mathbf{N}_{eu} \mathbf{A}$, es decir

$$\mathbf{e}^u = \mathbf{N}_{eu} \mathbf{g}^u, \quad \mathbf{g}^u = \mathbf{A} \mathbf{v} \quad (64)$$

donde \mathbf{g}^u es un vector de dimensión n_{gu} que contiene amplitudes de deformaciones derivadas (que podrían identificarse con valores nodales si se desea) y la matriz \mathbf{A} es *independiente de la posición*. Se advierte que la matriz \mathbf{A} toma aquí un papel semejante al discutido en el apartado **El AME Clásico**.

Sustituyendo las interpolaciones (63) en (60) y haciendo II estacionario con respecto a \mathbf{f} , \mathbf{g} y \mathbf{v} , se obtienen las ecuaciones matriciales del MEF

$$\begin{bmatrix} (s_2 + s_3)\mathbf{C} & -s_3\mathbf{H} & -s_2\mathbf{H}_\sigma \mathbf{A} \\ -s_3\mathbf{H}^T & (s_1 + s_3)\mathbf{S} & -s_1\mathbf{S}_e \mathbf{A} \\ -s_2\mathbf{A}^T \mathbf{H}_\sigma^T & -s_1\mathbf{A}^T \mathbf{S}_e^T & (1 + s_1 + s_2)\mathbf{K} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \\ \mathbf{v} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{p} \end{Bmatrix} \quad (65)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \int_V \mathbf{N}_\sigma^T \mathbf{E}^{-1} \mathbf{N}_\sigma dV, \quad \mathbf{S} = \int_V \mathbf{N}_e^T \mathbf{E} \mathbf{N}_e dV, \quad \mathbf{K} = \mathbf{A}^T \mathbf{S}_u \mathbf{A}, \quad \mathbf{S}_u = \int_V \mathbf{N}_{eu}^T \mathbf{E} \mathbf{N}_{eu} dV \\ \mathbf{H} &= \int_V \mathbf{N}_\sigma^T \mathbf{N}_e dV, \quad \mathbf{H}_\sigma = \int_V \mathbf{N}_\sigma^T \mathbf{N}_{eu} dV, \quad \mathbf{S}_e = \int_V \mathbf{N}_e^T \mathbf{E} \mathbf{N}_{eu} dV, \quad \mathbf{p} = \int_V \mathbf{N}_u^T \mathbf{b} dV + \int_{S_t} \mathbf{N}_u^T \hat{\mathbf{t}} dS \end{aligned} \quad (66)$$

En esta clase de modelos las matrices \mathbf{C} y \mathbf{S} retienen la propiedad de ser diagonales de bloque. Pero no son generalmente inversas mutuamente y, en realidad, pueden tener dimensiones diferentes. Además, las ecuaciones cinemáticas, constitutivas y de equilibrio (de forma EV o EN) no son fácilmente extraíbles de (65) usando las expresiones de residuos ponderados (18). Este punto se discute en más detalle en el último apartado, con relación al uso posible del Métodos de Fuerzas para discretizaciones de este tipo.

Pasamos ahora a estudiar ciertos casos especiales que proporcionan resultados concretos sobre la dependencia paramétrica.

Modelos isomixtos

Los elementos basados en (64)-(66) se llamarán *isomixtos* si los tres subespacios de aproximación para tensiones y deformaciones coinciden, es decir $\tilde{\sigma} \equiv \sigma^e \equiv \sigma^u$ y $\tilde{\mathbf{e}} \equiv \mathbf{e}^\sigma \equiv \mathbf{e}^u$. Esto se obtiene eligiendo interpolaciones idénticas

$$\mathbf{N}_\sigma = \mathbf{N}_e = \mathbf{N}_{eu} \equiv \mathbf{N}_{iso} \quad (\text{por ejemplo}), \quad (67)$$

que, por supuesto, implican $n_f = n_g = n_{gu}$. Consecuentemente $\mathbf{H} = \mathbf{H}_\sigma$ y $\mathbf{S} = \mathbf{S}_e = \mathbf{S}_u$, en las que todas estas matrices son cuadradas y simétricas, reduciendo (65) a

$$\begin{bmatrix} (s_2 + s_3)\mathbf{C} & -s_3\mathbf{H} & -s_2\mathbf{H}\mathbf{A} \\ -s_3\mathbf{H} & (s_1 + s_3)\mathbf{S} & -s_1\mathbf{S}\mathbf{A} \\ -s_2\mathbf{A}^T\mathbf{H} & -s_1\mathbf{A}^T\mathbf{S} & (1 + s_1 + s_2)\mathbf{K} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \\ \mathbf{v} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{p} \end{Bmatrix} \quad (68)$$

con $\mathbf{K} = \mathbf{A}^T \mathbf{S} \mathbf{A}$. La eliminación de las incógnitas \mathbf{g} y \mathbf{f} , que puede hacerse al nivel de elementos, da la ecuación de rigidez $\mathbf{K}^* \mathbf{v} = \mathbf{p}$. La matriz de *rigidez estructural efectiva* \mathbf{K}^* puede presentarse en forma compacta con la ayuda de una "rigidez residual" $\varepsilon \Delta \mathbf{S}$, definida por

$$\mathbf{C}(\mathbf{S} + \varepsilon \Delta \mathbf{S}) = \mathbf{H}^2 \quad (69)$$

donde ε es un factor de escala en la serie de Taylor mostrada en (70). Entonces

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{A}^T \mathbf{S}^* \mathbf{A}, \quad \mathbf{S}^* = \mathbf{S} - s_\sigma \varepsilon \Delta \mathbf{S} \mathbf{S} \left(\mathbf{S} - \frac{s_3^2}{s_{det}} \varepsilon \Delta \mathbf{S} \right)^{-1} = \mathbf{S} - s_\sigma \varepsilon \Delta \mathbf{S} + O(\varepsilon^2) \quad (70)$$

donde $s_{det} = s_1 s_2 + s_2 s_3 + s_3 s_1$ y $s_\sigma = s_2 + s_3$. En particular, si $s_3 = 0$, $\mathbf{K}^* = \mathbf{A}^T (\mathbf{S} - s_2 \varepsilon \Delta \mathbf{S}) \mathbf{A}$ exactamente. Se ve que en general la solución dada por un modelo isomixto depende de los parámetros a menos que $s_\sigma = 0$, o $s_{det} = 0$, o $\Delta \mathbf{S} = \mathbf{0}$. El último caso se estudia con más detalle a continuación. Si existe dependencia de los parámetros, podría usarse s_σ para ajustar la matriz de rigidez efectiva con la idea de mejorar el rendimiento del elemento.

Modelos isomixtos conmutativos

Un elemento isomixto se llamará *conmutativo* si se verifican las condiciones adicionales (A)-(C) enunciadas en el Apéndice. Allí se demuestra que esta subclase verifica

$$\mathbf{CS} = \mathbf{SC} = \mathbf{H}^2, \quad \text{i.e. } \Delta \mathbf{S} = \mathbf{0} \quad (71)$$

y $\mathbf{K}^* = \mathbf{K} = \mathbf{A}^T \mathbf{S} \mathbf{A}$ se hace independiente de los parámetros. Puesto que \mathbf{S} y \mathbf{C} conmutan, \mathbf{S} , \mathbf{C} y \mathbf{H} tienen el mismo sistema de autovalores y todas estas matrices (y sus potencias) conmutan arbitrariamente (véase el Apéndice). Entonces la inversa de la supermatriz en (68) es

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}^{-1}(q_1 \mathbf{S} \mathbf{Q} \mathbf{S} - \mathbf{S}) \mathbf{H}^{-1} & \mathbf{H}^{-1}(q_2 \mathbf{S} \mathbf{Q} - \mathbf{I}) & \mathbf{H}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{K}^{-1} \\ (q_2 \mathbf{Q} \mathbf{S} - \mathbf{I}) \mathbf{H}^{-1} & q_3 \mathbf{Q} & \mathbf{A} \mathbf{K}^{-1} \\ \mathbf{K}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{S} \mathbf{H}^{-1} & \mathbf{K}^{-1} \mathbf{A}^T & \mathbf{K}^{-1} \end{bmatrix} \quad (72)$$

donde q_1 , q_2 y q_3 han sido definidos en (20). Comparando (72) con (19) se deduce que las ecuaciones discretizadas pueden escribirse

$$\begin{bmatrix} (s_2 + s_3) \mathbf{C} & -s_3 \mathbf{I} & -s_2 \mathbf{A} \\ -s_3 \mathbf{I} & (s_1 + s_3) \mathbf{S} & -s_1 \mathbf{S} \mathbf{A} \\ -s_2 \mathbf{A}^T & -s_1 \mathbf{A}^T \mathbf{S} & (1 + s_1 + s_2) \mathbf{A}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{f}^* \\ \mathbf{g} \\ \mathbf{v} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{p} \end{Bmatrix} \quad (73)$$

donde $\mathbf{f}^* = \mathbf{H} \mathbf{f}$ es un vector de fuerzas internas efectivas. La ecuación (73) tiene la misma configuración, si se hace $\mathbf{f}^0 = \mathbf{g}^0 = \mathbf{0}$, que el sistema parametrizado (16). Consecuentemente todos los procedimientos de ensamblaje y solución explicados para el clásico AME se aplican a modelos de elementos isomixtos a nivel de elementos o de ensamblaje, si \mathbf{f} se redefine como \mathbf{f}^* . Las ecuaciones de equilibrio, constitutivas y cinemáticas se separan así

$$\boxed{\mathbf{A}^T \mathbf{f}^* = \mathbf{A}^T \mathbf{H} \mathbf{f} = \mathbf{p}, \quad \mathbf{f}^* = \mathbf{H} \mathbf{f} = \mathbf{S} \mathbf{g}, \quad \mathbf{H} \mathbf{g} = \mathbf{C} \mathbf{f}, \quad \mathbf{g} = \mathbf{A} \mathbf{v}} \quad (74)$$

Si es necesario pueden introducirse fácilmente efectos de deformaciones o tensiones iniciales cambiando las ecuaciones constitutivas: $\mathbf{f}^* = \mathbf{H} \mathbf{f} = \mathbf{S}(\mathbf{g} - \mathbf{g}^0)$ y $\mathbf{H} \mathbf{g} = \mathbf{C}(\mathbf{f} - \mathbf{f}^0)$.

Modelos hipermixtos y el principio de limitación

Llamemos σ_{iso} y \mathbf{e}_{iso} a los campos de tensiones y deformaciones, respectivamente, de un modelo conmutativo isomixto. Supongamos que buscamos enriquecer éstos dos campos con la inyección de modos adicionales de interpolación

$$\sigma = \sigma_{iso} + \mathbf{N}_x \mathbf{f}_x = \mathbf{N}_{iso} \mathbf{f}_{iso} + \mathbf{N}_x \mathbf{f}_x, \quad \mathbf{e} = \mathbf{e}_{iso} + \mathbf{N}_x \mathbf{g}_x = \mathbf{N}_{iso} \mathbf{g}_{iso} + \mathbf{N}_x \mathbf{g}_x \quad (75)$$

Aquí los vectores \mathbf{f}_x y \mathbf{g}_x contienen tensiones y deformaciones generalizadas adicionales, mientras que el campo de desplazamientos se mantiene inalterado, de modo que $\mathbf{e}^u = \mathbf{N}_{iso} \mathbf{A} \mathbf{v}$. El modelo resultante se llamará *hipermixto*. Las ecuaciones discretizadas de este modelo son

$$\begin{bmatrix} (s_2 + s_3)\mathbf{C} & (s_2 + s_3)\mathbf{C}_x & -s_3\mathbf{H} & -s_3\mathbf{H}_x & -s_2\mathbf{H}\mathbf{A} \\ (s_2 + s_3)\mathbf{C}_x^T & (s_2 + s_3)\mathbf{C}_{xx} & -s_3\mathbf{H}_x^T & -s_3\mathbf{H}_{xx} & -s_2\mathbf{H}_x^T \mathbf{A} \\ -s_3\mathbf{H} & -s_3\mathbf{H}_x & (s_1 + s_3)\mathbf{S} & (s_1 + s_3)\mathbf{S}_x & -s_1\mathbf{S}\mathbf{A} \\ -s_3\mathbf{H}_x^T & -s_3\mathbf{H}_{xx} & (s_1 + s_3)\mathbf{S}_x^T & (s_1 + s_3)\mathbf{S}_{xx} & -s_1\mathbf{S}_x^T \mathbf{A} \\ -s_2\mathbf{A}^T \mathbf{H} & -s_2\mathbf{A}^T \mathbf{H}_x & -s_1\mathbf{A}^T \mathbf{S} & -s_1\mathbf{A}^T \mathbf{S}_x & (1 + s_1 + s_2)\mathbf{K} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{f}_x \\ \mathbf{g} \\ \mathbf{g}_x \\ \mathbf{v} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{p} \end{Bmatrix} \quad (76)$$

donde $\mathbf{C}_x = \int_V \mathbf{N}_x \mathbf{E}^{-1} \mathbf{N}_{iso} dV$, $\mathbf{S}_x = \int_V \mathbf{N}_x \mathbf{E} \mathbf{N}_{iso} dV$ etc. Por hipótesis, la primera, tercera y quinta ecuaciones matriciales se cumplen si $\mathbf{f} = \mathbf{f}_{iso}$, $\mathbf{g} = \mathbf{g}_{iso}$, $\mathbf{f}_x = \mathbf{0}$ y $\mathbf{g}_x = \mathbf{0}$. Usando esta propiedad y las identidades siguientes, obtenidas en el Apéndice: $\mathbf{S}_x = \mathbf{T}\mathbf{S}$, $\mathbf{C}_x = \mathbf{T}\mathbf{C}$ y $\mathbf{H}_x = \mathbf{T}\mathbf{H}$, donde $\mathbf{T} = \mathbf{H}_x \mathbf{H}^{-1}$, se demuestra inmediatamente que la segunda y cuarta ecuaciones matriciales se cumplen solamente por la solución isomixta. Consecuentemente, *nada se gana con la inyección de modos de tensiones y deformaciones adicionales* usando (75).

Este resultado es una generalización del principio de limitación de Fraeijs de Veubeke,³⁶ que aquí ha sido demostrado para funcionales arbitrarias (porque los parámetros han sido mantenidos libres). La demostración puede ser extendida, con más álgebra, a interpolaciones diferentes para las tensiones y deformaciones adicionales. Un punto generalmente descuidado es que el principio no es válido para vectores arbitrarios de fuerzas nodales, como serían los producidos, por ejemplo, por distribuciones arbitrarias de tensiones o deformaciones iniciales. La cuestión de si el principio vale para modelos isomixtos generales (es decir no conmutativos) no está resuelta. No obstante, se sabe que el principio no es generalmente válido en el caso de modelos híbridos o de modelos mixtos con grados de libertad conectados de tipo desplazamiento y tensiones.³⁷

Modelos hipomixtos

Los modelos mixtos de elementos finitos que no son isomixtos o hipermixtos se llamarán *hipomixtos*. Para éstos la solución de ecuaciones a nivel de elemento o ensamblaje depende de la selección de los parámetros. La condensación de \mathbf{f} y \mathbf{g} (un proceso que se puede ejecutar al nivel de los elementos) proporciona las ecuaciones de rigidez

$$\mathbf{K}^* \mathbf{v} = \mathbf{A}^T \mathbf{S}^* \mathbf{A} \mathbf{v} = \mathbf{p} \quad (77)$$

donde \mathbf{K}^* y \mathbf{S}^* son las matrices modificadas de rigidez de la estructura y constitutiva, respectivamente. Las ecuaciones de equilibrio, constitutiva y cinemáticas pueden separarse redefiniendo \mathbf{f} y \mathbf{g} a los nuevos valores efectivos

$$\boxed{\mathbf{A}^T \mathbf{f}^* = \mathbf{p}, \quad \mathbf{f}^* = \mathbf{S}^* \mathbf{g}^*, \quad \mathbf{g}^* = \mathbf{A} \mathbf{v}} \quad (78)$$

En contraste al caso (74) de modelos isomixtos conmutativos, \mathbf{S}^* y \mathbf{f}^* *dependen de los parámetros*.

En general esta dependencia es complicada. Un caso que permite un análisis completo, es el que se toman las tensiones y deformaciones *constantes* sobre cada elemento. Por brevedad consideramos la formulación con un solo parámetro libre con $s_2 = s_3 = 0$ y $s_1 = -s$ para eliminar las tensiones como el campo independiente y supondremos que las propiedades constitutivas son uniformes sobre los elementos. El campo de deformaciones supuestas de un elemento es

$$\mathbf{e} = \bar{\mathbf{e}} \quad (79)$$

donde la barra denota el valor medio sobre un elemento. El modelo discreto que resulta de esta hipótesis es hipomixto a menos que las deformaciones \mathbf{e}^u deducidas de los desplazamientos sean también constantes, lo que puede ocurrir solamente en elementos de tipo simplex. Llamando $v = \int_V dV$ la medida del volumen del elemento, las ecuaciones de un elemento individual son

$$\begin{bmatrix} -sv\mathbf{E}^{-1} & s\mathbf{S}_e\mathbf{A} \\ s\mathbf{A}^T\mathbf{S}_e^T & (1-s)\mathbf{A}^T\mathbf{S}_u\mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{g} \\ \mathbf{v} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{p} \end{Bmatrix} \quad (80)$$

La condensación de $\mathbf{g} \equiv \bar{\mathbf{e}}$ proporciona (77), donde

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{A}^T [(1-s)\mathbf{S}_u + s\mathbf{S}_e^*] \mathbf{A}, \quad \mathbf{S}_e^* = v^{-1} \mathbf{S}_e^T \mathbf{E} \mathbf{S}_e \quad (81)$$

Esta ecuación muestra que la matrix de rigidez efectiva es una combinación lineal de la rigidez $\mathbf{A}^T \mathbf{S}_u \mathbf{A}$, proveniente de los desplazamientos supuestos, y la rigidez $\mathbf{A}^T \mathbf{S}_e^* \mathbf{A}$ proveniente de la deformación constante supuesta. La primera es generalmente sobrerígida, mientras que la segunda es generalmente sobreflexible y con un rango deficiente. Consecuentemente, una idea obvia es tratar de ajustar el parámetro s para obtener una rigidez equilibrada⁴. La realización práctica de esta idea, al mismo tiempo que se exige una pequeña sensibilidad a la distorsión, ha tenido más éxito en el caso de elementos híbridos, pues para éstos se disponen de más “botones de control del comportamiento”.³⁸⁻⁴¹

VIÑETAS HISTÓRICAS

Este apartado final relaciona los resultados anteriores con varios pasajes históricos importantes en la evolución de los métodos matriciales en la Mecánica de Estructuras.

¿Quién escribió la primera matriz de rigidez o flexibilidad?

La formulación no-matricial de la Mecánica Estructural Discretizada, basada en los antecesores de los Métodos de Fuerzas y Desplazamientos actuales, se remonta a la década de 1860. Los desarrollos esenciales se completaron al comienzo de la década de 1900. Timoshenko⁴² ofrece un relato histórico recomendable (aunque el término “matriz” no aparece en su libro.)

La formulación matricial que precede al MEF actual se atribuye generalmente a un grupo de ingenieros aeronáuticos, citados en un subapartado anterior, cuyo trabajo apareció en el período 1947 a 1956, después de la Segunda Guerra Mundial. Este grupo abrió nuevos caminos en el uso de computadores programables (digitales y analógicos) para diseño y análisis de productos aeronáuticos. Pero ¿qué pasó entre las Guerras Mundiales?

El autor ha encontrado una descripción completa de los métodos matriciales en la monografía de Frazer, Duncan y Collar⁴³ cuya primera edición apareció en 1938. Este libro presenta material de investigación desarrollado para apoyo de la industria aeronáutica británica. Varias referencias a informes internos sugieren que esas investigaciones se iniciaron a fines de la década de 1920. Los métodos están orientados al uso de calculadoras manuales de escritorio para las que el álgebra matricial proporciona una herramienta natural para organizar cálculos repetitivos. En este libro, el método de Desplazamientos juega un papel esencial en análisis dinámicos (vibración e inestabilidad aerolástica). Las matrices de flexibilidad se utilizan para construir matrices dinámicas en combinación con matrices de masa.

Repasando el tema por el lado matemático, hay que recordar que las matrices –o “determinantes” que fue el nombre original– fueron inventadas en 1858 por Cayley en Cambridge, aunque Gibbs (el co-inventor del cálculo vectorial) advocó la prioridad del matemático alemán Grassmann. De cualquier modo, el cálculo matricial fue inicialmente cultivado en Inglaterra y Alemania. La aplicación de matrices para problemas estructurales quizás fue ayudada por la aparición, entre 1925 y 1932, de varios tratados de álgebra matricial, citados en la página 401 de Frazer *et.al.*⁴³

En conclusión, la respuesta a la pregunta del subtítulo no se conoce con certitud. No obstante, el conjunto de circunstancias anteriores sugiere la siguiente respuesta: alguien trabajando directa o indirectamente en la industria aeronáutica de Inglaterra o Alemania, que eran entonces los países más avanzados en esa tecnología, alrededor de 1930.

Dos décadas de transición

El Análisis Matricial de Estructuras evolucionó rápidamente durante el período 1950-1970. Los lectores entrenados en la presente tecnología del MEF encontrarán que la mayoría de las publicaciones de ese período son difíciles de seguir debido a la notación personalizada y la exageración de argumentos físicos. Estas dificultades pueden ponerse en cierta perspectiva observando que esas dos décadas representan un *período de transición* entre los cálculos manuales de la era previa al ordenador digital, y los procedimientos automáticos de los programas del MEF actuales.

Para un cálculo digital eficiente, la organización de datos (en términos de acceso

rápido, a la vez que utilizar las ventajas de la esparcidad, la vectorización y el paralelismo) es de interés primario; mientras que el número de ecuaciones, por debajo de ciertos límites que dependen de la potencia del ordenador, es secundario. (Por ejemplo, la diferencia entre 1000 y 10000 grados de libertad en un supercomputador es insignificante en relación a la escala temporal humana). Pero en cálculos manuales el número de ecuaciones es fundamental, pues el "límite de confort" es 5 o 6 ecuaciones para métodos directos y quizás 5-10 veces más para métodos iterativos de relajación ajustados al problema. No es por tanto sorprendente que los métodos de reducción jugaron un papel prominente antes de 1950 y que ejercieron una influencia notable hasta 1970.

El conjunto de métodos en el período de transición mencionado se caracterizan por el *agrupamiento funcional* elaborado de variables cinemáticas y estáticas. Estos esquemas pueden explicarse como variaciones de la clasificación siguiente:

$$\begin{aligned} \text{fuerzas generalizadas} & \left\{ \begin{array}{ll} \text{primarias} & \left\{ \begin{array}{l} \text{fuerzas aplicadas} \\ \text{fuerzas hiperestáticas} \end{array} \right. \\ \text{secundarias} & \left\{ \begin{array}{l} \text{fuerzas condensables} \\ \text{reacciones en los apoyos} \end{array} \right. \end{array} \right. \\ \\ \text{desplazamientos generalizados} & \left\{ \begin{array}{ll} \text{primarios} & \left\{ \begin{array}{l} \text{desplazamientos aplicados} \\ \text{desplazamientos hiperestáticos} \end{array} \right. \\ \text{secundarios} & \left\{ \begin{array}{l} \text{desplazamientos condensables} \\ \text{condiciones de apoyo} \end{array} \right. \end{array} \right. \end{aligned} \quad (82)$$

En esta clasificación *fuerzas aplicadas* son la que actúan con valor no nulo, es decir las que el instructor o ingeniero marca con flechas. En el pensamiento transicional, las fuerzas nulas actuando en grados de libertad descargados se clasifican como *condensables*, pues pueden eliminarse con el algoritmo de condensación estática. Similarmente, *los desplazamientos aplicados* se diferencian claramente de los desplazamientos nulos (provenientes de apoyos), pues éstos pueden desecharse inmediatamente. Los desplazamientos hiperestáticos (o sobreabundantes), que son la contrapartida de las fuerzas hiperestáticas, han sido identificados con varios nombres durante ese período, por ejemplo "desplazamientos redundantes" y "deficiencias cinemáticas."

La jerarquía de (82) puede acomodarse entre la notación de este artículo con la introducción de los símbolos

$$\mathbf{p}^{gen} = \left\{ \begin{array}{ll} \text{aplicados:} & \mathbf{p}_a \\ \text{hiperestáticos:} & \mathbf{y} \\ \text{condensables:} & \mathbf{p}_c = \mathbf{0} \\ \text{reacciones:} & \mathbf{p}_s \end{array} \right\}, \quad \mathbf{v}^{gen} = \left\{ \begin{array}{ll} \text{aplicados:} & \mathbf{v}_a \\ \text{hiperestáticos:} & \mathbf{z} \\ \text{condensables:} & \mathbf{v}_c \\ \text{soportes:} & \mathbf{v}_s = \mathbf{0} \end{array} \right\} \quad (83)$$

Debe notarse que estos dos vectores no son conjugados en energía. Para exacerbar la confusión, varios autores identifican \mathbf{y} con \mathbf{p}_s y no distinguen \mathbf{z} de \mathbf{v}_c .

En la unificación de los Métodos de Fuerzas y Desplazamientos de Argyris y Kelsey¹⁵ la descomposición de estados internos puede expresarse, dentro de la notación presente, como

$$\mathbf{f} = \hat{\mathbf{B}}_0 \mathbf{p}_a + \hat{\mathbf{B}}_1 \mathbf{y}, \quad \mathbf{g} = \hat{\mathbf{A}}_0 \mathbf{v}_a + \hat{\mathbf{A}}_1 \mathbf{v}_c \quad (84)$$

Aquí $\mathbf{z} \equiv \mathbf{v}_c$, es decir los desplazamientos condensables se toman como desplazamientos hiperestáticos (la diferencia fue advertida por varios autores posteriores). La relación entre las matrices $\hat{\mathbf{A}}$ y $\hat{\mathbf{B}}$ y las usadas previamente es la siguiente. La matriz $\hat{\mathbf{B}}_0$ omite las columnas correspondientes a las fuerzas condensables agrupadas en $\mathbf{p}_c = \mathbf{0}$. La matriz $\hat{\mathbf{A}}_0$ es un subconjunto de \mathbf{A}_1 . Finalmente, $\hat{\mathbf{A}}_1 \equiv \mathbf{A}_0$, y $\hat{\mathbf{B}}_1 \equiv \mathbf{B}_1$. La dualidad resultante, presentada en formato lado-a-lado en la Tabla II de Argyris y Kelsey,¹⁵ dice que $\mathbf{p}_a \leftrightarrow \mathbf{v}_a$ y $\mathbf{y} \leftrightarrow \mathbf{v}_c$, como se ilustra en la Figura 6. Esta correspondencia efectivamente “cruza los hilos” de (15), al mismo tiempo que elimina explícitamente los desplazamientos impuestos nulos. Se ve que (84) representa una mezcla de lo que aquí se denominan formas DCE y DCI.

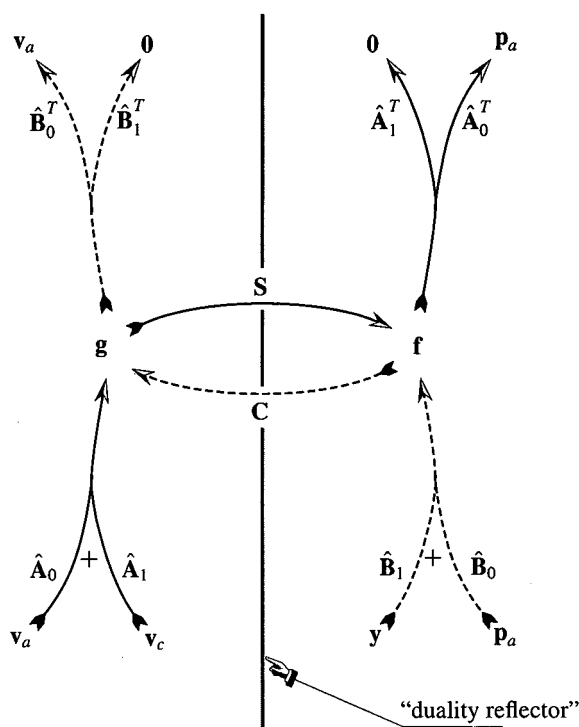


Figura 6. Representación gráfica del esquema de dualidad de Argyris y Kelsey, que puede compararse con el esquema de la Figura 5

Aunque es importante para cálculos manuales (y para los ordenadores de memoria limitada de ese período), esa organización más preocupada por la reducción de

incógnitas, es inadecuada para la programación del MEF. En la práctica corriente, la diferencia funcional entre fuerzas aplicadas y condensables y entre desplazamientos impuestos y condiciones de apoyo no tiene relevancia. Este punto de vista, orientado a la programación, es el que gobierna la unificación presentada en este artículo; por ejemplo en la partición (8).

Dadas estas premisas, ¿porqué molestarse en traer estos aspectos históricos? Hay dos argumentos a favor.

Primero: el pensamiento transicional, que ciertamente no es relevante para la programación del MEF, todavía aparece en libros de texto de Introducción al Análisis Estructural. Esta decisión tiene buenas intenciones pedagógicas, pues los cálculos manuales ayudan a entender los puntos claves del análisis. Sin embargo, una buena proporción de los estudiantes encuentran luego dificultades en adaptarse a la programación práctica del MEF en cursos más avanzados.

Segundo: las técnicas de reducción todavía son importantes en cálculos de álgebra simbólica, pues tales expresiones son susceptibles de “explosiones combinatorias” cuando el número de grados de libertad crece. Esta forma de cálculo está creciendo en popularidad en el diseño preliminar de estructuras (y otros sistemas de ingeniería) a medida que los programas versátiles de computación simbólica aparecen en ordenadores personales.

Crepúsculo y olvido del método de fuerzas

Antes de la aparición del ordenador digital, la versión no matricial del Método de Fuerzas disfrutaba de una buena reputación desde las contribuciones esenciales de Maxwell, Mohr y Castigliano. Este método proporciona directamente los esfuerzos, que son de importancia fundamental en diseños estructurales controlados por tensiones. Asimismo, ofrece a ingenieros experimentados oportunidades para “acortar distancias” a través de la selección ingeniosa de las fuerzas hiperestáticas. A fines de los años 1940 la versión matricial había tomado la delantera en aplicaciones aeronáuticas. En el apartado anterior se ha advertido que la teoría matricial de estructuras basada en métodos energéticos desarrollada por Argyris y Kelsey culminó (en 1954) con la exposición de la dualidad formal de los Métodos de Fuerzas y Desplazamientos.

Esta exposición de dualidad tuvo, sin embargo, un aspecto oscuro que produjo confusión durante dos décadas. Si la dualidad se acepta literalmente, parece como si los dos métodos ejecutaran la misma secuencia de pasos, que pueden escribirse (y así fueron mostrados) “lado a lado”. La explicación, ilustrada en la Figura 6, es que esta dualidad vale para una situación artificial: la misma estructura se analiza con el Método de Fuerzas bajo un sistema de cargas aplicadas \mathbf{p}_a y luego con el Método de Desplazamientos bajo desplazamientos aplicados \mathbf{v}_a que corresponden con esas cargas. El segundo caso es artificial. Lo que cuenta en la práctica, es la habilidad de resolver el mismo problema por métodos duales en vez de problemas duales por el mismo método.

Los ingenieros aeronáuticos entrenados en el Método Matricial de Fuerzas durante los años 1950 –y que frecuentemente ocuparon posiciones de administración en los 1960– no se dieron por vencidos fácilmente. Por el año 1965 solamente Boeing y Bell, entre las compañías aeroespaciales mayores de esa época, habían hecho inversiones económicas sustanciales en el Método de Desplazamientos. Esa tenacidad fue eventualmente

sometida a una prueba severa. La propuesta de NASA en 1965 para la construcción del sistema NASTRAN requirió el desarrollo simultáneo de versiones basadas en ambos métodos.⁴⁴ Las dos versiones tendrían capacidades idénticas de modelización y solución, incluyendo análisis dinámico y pandeo, y se otorgaron contratos en conformidad con esas especificaciones. Eventualmente el desarrollo de la versión de Método de Fuerzas fue cancelada en 1969. El año siguiente puede tomarse convencionalmente como término del período de transición esbozado en el apartado anterior, marcando así el fin del Método de Fuerzas como una alternativa seria para programas generales de elementos finitos.

¿Es posible (o deseable) revivir el Método de Fuerzas? Este fue el tema de una Nota Técnica,⁸ donde se ofrecieron argumentos en favor de ciertos usos especiales. Los avances en esas direcciones, sin embargo, dependerían de un ataque combinado en varios frentes, como se discute en lo que sigue.

Un obstáculo en la extensión del Método de Fuerzas a elementos finitos mixtos o híbridos es que las ecuaciones discretizadas aparecen en forma “difusa” como consecuencia del proceso de integración. Esta mezcla enturbia la separación de las ecuaciones de equilibrio, constitutivas y cinemáticas. Para el caso de los elementos mixtos estudiado en el apartado previo, la dificultad se evita con la introducción de fuerzas internas efectivas \mathbf{f}^* y deformaciones efectivas \mathbf{g}^* , como se muestra en las ecuaciones (74) y (78). Aun así, los elementos mixtos conectados con grados de libertad de tipo tensión, y también los elementos híbridos incorporan complicaciones adicionales. Esta mezcla también oscurece las propiedades de dualidad.

La dualidad correcta entre los Métodos de Fuerzas y Desplazamientos para continuos elásticos arbitrarios fue sistemáticamente estudiada por Fraeijs de Veubeke y sus colegas en Liège desde 1965 hasta 1975, siguiendo sugerencias de Zienkiewicz en la explotación de la “analogía de la losa” (*slab analogy*) de Southwell.⁴⁵ La equivalencia requiere la introducción de funciones de potencial del tensor de tensión como duales del campo de desplazamientos.⁴⁶ La idea es elegante pero no práctica, pues requiere el desarrollo de nuevos elementos con grados de libertad sin significado físico. Estos elementos no pueden combinarse con otros más comunes en los programas del MEF comerciales.

Las Notas del curso de Calgary³¹ insinúan un procedimiento más práctico: la construcción directa de matrices \mathbf{B} esparcidas considerando formas de compatibilidad débiles en parcelas (*patches*) de elementos comunes. La explotación sistemática de esta idea podría haber resultado en un esfuerzo serio de revivir el método. Desgraciadamente la investigación fue interrumpida por el fallecimiento prematuro de Fraeijs de Veubeke en 1976. Varios temas similares han sido investigados sistemáticamente por Patnaik desde 1970⁴⁷⁻⁴⁹ en el marco del Método Integrado de Fuerzas, independientemente de los trabajos en Liège.

Resurrección de métodos olvidados

Los cambios importantes en sistemas de cálculos disponibles a la gran masa de ingenieros puede afectar la adopción o rechazo de métodos competitivos. Tres ejemplos, dos recientes, ilustran esa influencia.

El Método de Matrices de Transferencia (MMT). Esta es una formulación matricial

de análisis estructural lineal apoyada directamente en la solución de *ecuaciones diferenciales ordinarias* sobre los miembros. El MMT es similar en filosofía a los métodos de disparo (shooting methods) usados en problemas de trayectorias (*two-point boundary value problems*) en otros campos. Sus ventajas son: proporciona soluciones exactas (excepto por errores introducidos en la integración numérica, si ésta es necesaria) y es económico en el uso de la memoria. Desventajas: restringido a sistemas reticulados en dos y tres dimensiones; da ecuaciones no simétricas; es imposible su extensión a modelos continuos y es difícil su extensión a problemas no lineales. El MMT fue popular en Europa durante el período 1945–1960. La exposición más completa aparece en el libro de Pestel y Leckie.⁹ Desapareció a mediados de la década de 1960 cuando la expansión progresiva de la capacidad de memoria primaria y secundaria en ordenadores digitales permitió el uso práctico de los métodos generales de Fuerzas y Desplazamientos, que no sufren de las desventajas mencionadas. El MMT se redescubre periódicamente (con otros nombres) en aplicaciones especiales, tales como pórticos.

Métodos Iterativos para Sistema Lineales. Los métodos iterativos de solución han dominado consistentemente la mecánica computacional de fluidos. En contraste, su historia en relación con el AME ha sido más variada. Antes de la aparición de ordenadores digitales con suficiente potencia, los métodos iterativos se usaron en cálculos considerados “grandes” para la época. Tres ejemplos: el método de relajación de Southwell para placas y láminas, el método de Hardy-Cross para pórticos y el método SOR (*successive overrelaxation*) en varias implementaciones iniciales del MEF.⁵⁰ En el caso del MEF el período inicial de transición terminó con la victoria completa de los métodos directos, cuando el almacenamiento secundario de disco apareció en los ordenadores científicos de IBM y CDC en 1965. El uso de fichas de acceso directo y la explotación de esparcidad con métodos de perfil (*skyline*) y frontales permitió la resolución efectiva de sistemas con millares de ecuaciones hacia 1970. El dominio ha persistido hasta hoy en día. Pero con la popularización creciente de ordenadores masivamente paralelos, hay indicios de un nuevo interés en métodos iterativos combinados con directos, como se discute en el punto siguiente.

Métodos Combinados para Cálculo Paralelo. La aparición de ordenadores masivamente paralelos comerciales (convencionalmente el adjetivo “masivo” identifica máquinas con 64 o más nodos procesadores o NPs) ha originado la resurrección selectiva de métodos en desuso. Supongamos que un modelo estructural de elementos finitos tiene 6 millones de ecuaciones para resolver en 128 NPs. El problema se aborda con el método de *descomposición de dominios*. El modelo se divide en 128 subestructuras o subdominios formados por agrupamientos de elementos conectados y cada subdominio se asigna a un NP. El “balance de carga de cálculo” (*load balancing*) requiere que el número de ecuaciones en cada subestructura no sea muy diferente al promedio $6000000/128 = 46875$. La solución del sistema total requiere dos etapas: la solución de cada subestructura desconectada (el “problema interno”) y la solución de las incógnitas de frontera entre subestructuras (el “problema de interconexión” o “problema externo”). El problema interno se resuelve sin dificultad en paralelo con métodos directos. Pero los métodos directos son ineficientes para el problema de interconexión, pues no escalan bien (a consecuencia del efecto degradante de las

comunicaciones en el movimiento de datos) cuando el número de NPs sobrepasa 16. Las investigaciones recientes han favorecido los métodos semi-iterativos, y en particular el de gradientes conjugados preconditionados, para este problema. Por ejemplo, el método de FETI (*Finite Element Tearing and Interconnecting*) desarrollado por Farhat y colegas⁵¹ usa multiplicadores de Lagrange como incógnitas de frontera, que pueden interpretarse como fuerzas transmitidas entre subestructuras. Es interesante destacar que FETI integra métodos directos e iterativos de solución, a la vez que combina los Métodos de Desplazamientos y de Fuerzas aplicados a diferentes partes del problema.

Estos tres ejemplos ilustran adecuadamente que cambios significantes en herramientas y plataformas de cálculo pueden revivir métodos y algoritmos temporalmente olvidados.

AGRADECIMIENTOS

El trabajo en Principios Variacionales Parametrizados mencionado en el apartado sobre elementos finitos mixtos fue apoyado por la Air Force Office of Scientific Research con Grant F49620-87-C-0074, el NASA Langley Research Center con Grant NAG1-756, el NASA Lewis Research Center con Grant NAG3-1273 y la National Science Foundation con Grant ASC-9217394. El autor expresa su agradecimiento al Dr. Patnaik y los Profesores Clough, Plemmons y Zienkiewicz por sus valiosas sugerencias en temas históricos y referencias originales.

REFERENCIAS

1. C.A. Felippa, "A Survey of Parametrized Variational Principles and Applications to Computational Mechanics," *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, Vol. **113**, pp. 109-139, (1994).
2. C.A. Felippa y C. Militello, "Developments in Variational Methods for High Performance Plate and Shell Elements," en *Analytical and Computational Models for Shells*, CED Vol. **3**, A.K. Noor, T. Belytschko y J.C. Simo (Eds), The American Society of Mechanical Engineers, ASME, New York, pp. 191-216, (1989).
3. C.A. Felippa y C. Militello, "Variational Formulation of High Performance Finite Elements: Parametrized Variational Principles," *Computers & Structures*, Vol. **36**, pp. 1-11, (1990).
4. C.A. Felippa, "Parametrized Multifield Variational Principles in Elasticity: I. Mixed Functionals," *Commun. Appl. Numer. Meths*, Vol. **5**, pp. 69-78, (1989).
5. C.A. Felippa, "Parametrized Multifield Variational Principles in Elasticity: II. Hybrid Functionals and the Free Formulation," *Commun. Appl. Numer. Meths*, Vol. **5**, pp. 79-88, (1989).
6. C.A. Felippa, "The Extended Free Formulation of Finite Elements in Linear Elasticity," *J. Appl. Mech.*, Vol. **56**, pp. 609-616, (1989).
7. C.A. Felippa, B. Haugen y C. Militello, "From the Individual Element Test to Finite Element Templates: I. The Evolution of the Patch Test," *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol. **38**, pp. 199-229, (1995).

8. C.A. Felippa, "Will the Force Method Come Back?," *J. Appl. Mech.*, Vol. **54**, pp. 728-729, (1987).
9. E.C. Pestel y F.A. Leckie, "*Matrix Methods in Elastomechanics*", McGraw-Hill, New York, (1963).
10. R. Fletcher, *Practical Methods of Optimization: Vol. 2, Constrained Optimization*, Wiley, New York, (1981).
11. S. Levy, "Computation of Influence Coefficients for Aircraft Structures with Discontinuities and Sweepback," *J. Aero. Sci.*, Vol. **14**, pp. 547-560, (1947).
12. T. Rand, "An Approximate Method for Computation of Stresses in Sweptback Wings," *J. Aero. Sci.*, Vol. **18**, pp. 61-63, (1951).
13. B. Langefors, "Analysis of Elastic Structures by Matrix Coefficients, with Special Regard to Semimonocoque Structures," *J. Aero. Sci.*, Vol. **19**, pp. 451-458, (1952).
14. L.B. Wehle y W. Lansing, "A Method for Reducing the Analysis of Complex Redundant Structures to a Routine Procedure," *J. Aero. Sci.*, Vol. **19**, pp. 677-684, (1952).
15. J.H. Argyris y S. Kelsey, *Energy Theorems and Structural Analysis*, Butterworths, London, (1960); reimpresso de *Aircraft Engrg.*, Vol. **26**, Oct-Nov 1954 y Vol. **27**, April-May, (1955).
16. P.H. Denke, "A General Digital Computer Analysis of Statically Indeterminate Structures," *NASA Tech. Note D-1366*, (1962).
17. J. Robinson, "*Structural Matrix Analysis for the Engineer*", Wiley, New York, (1966).
18. J.S. Przemieniecki, "*Theory of Matrix Structural Analysis*", McGraw-Hill, (1968), (edición de Dover 1986).
19. I. Kaneko, M. Lawo, y G. Thierauf, "On Computational Procedures for the Force Method," *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol. **18**, pp. 1469-1495, (1982).
20. M.W. Berry, M.T. Heath, I. Kaneko, M. Lawo, R.J. Plemmons, y R.C. Ward, "An Algorithm to Compute a Sparse Basis of the Null Space," *Numer. Math.*, Vol. **47**, pp. 483-504, (1985).
21. I. Kaneko y R.J. Plemmons, "Minimum Norm Solutions to Linear Elastic Analysis Problems," *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol. **20**, pp. 983-998, (1984).
22. J.R. Gilbert y M.T. Heath, "Computing a Sparse Basis for the Null Space," *SIAM J. Alg. Disc. Meth.*, Vol. **8**, pp. 446-459, (1987).
23. T.F. Coleman y A. Pothén, "The Null Space Problem: II. Algorithms," *SIAM J. Alg. Disc. Meth.*, Vol. **8**, pp. 544-563, (1987).
24. R.J. Plemmons y R.E. White, "Substructuring Methods for Computing the Nullspace of Equilibrium Matrices," *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, Vol. **1**, pp. 1-22, (1990).
25. S. Levy, "Structural Analysis and Influence Coefficients for Delta Wings," *J. Aero. Sci.*, Vol. **20**, pp. 677-684, (1953).
26. M.J. Turner, R.W. Clough, H.C. Martin y L.J. Topp, "Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures," *J. Aeron. Sci.*, Vol. **23**, pp. 805-824, (1956).
27. M.J. Turner, "The Direct Stiffness Method of Structural Analysis," Structural and Materials Panel Paper, AGARD Meeting, Aachen, Germany, (1959).
28. M.J. Turner, H.C. Martin y R.C. Weikel, "Further Development and Applications of the Stiffness Method," AGARD Structures and Materials Panel, Paris, France, July 1962, reimpresso en "*AGARDograph 72: Matrix Methods of Structural Analysis*", B.M. Fraeijs de Veubeke (Eds), MacMillan, New York, pp. 203-266, (1964).
29. E. Kosko, "Matrix Inversion by Partitioning," *Aeron. Quart.*, Vol. **8**, pp. 157-184, (1957).

30. E. Kosko, "The equivalence of Force and Displacement Methods in the Matrix Analysis of Complex Structures," *Proc. 1st Conf. Matrix Meth. Struc. Mech.*, Wright-Patterson AFB, Ohio, 1965, AFFDL 66-80, pp. 329-352, (1966).
31. B.M. Fraeijs de Veubeke, "Matrix Structural Analysis," Lecture Notes for the International Research Seminar on the Theory and Application of Finite Element Methods, Calgary, Alberta, Canada, July-August 1973; reimpresso en "*B. M. Fraeijs de Veubeke Memorial Volume of Selected Papers*", M. Geradin (Eds), Sitthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn, The Netherlands, pp. 509-568, (1980).
32. S.N. Patnaik y P. Dayaratnam, "Behavior and Design of Pin Connected Structures," *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol. **2**, pp. 579-595, (1970).
33. G. Thierauf y A. Topcu, "Structural Optimization using the Force Method," *Proc. World Congr. on FEM in Struct. Mech.*, Bornemouth, England, (1976).
34. C.A. Felippa, "Parametrized Variational Principles Encompassing Compressible and Incompressible Elasticity," *Int. J. Solids Struc.*, Vol. **29**, pp. 57-68, (1991).
35. C.A. Felippa, "Refined Finite Element Analysis of Linear and Nonlinear Two-Dimensional Structures," *Ph.D. Dissertation*, Department of Civil Engineering, University of California, Berkeley, CA, (1966).
36. B.M. Fraeijs de Veubeke, "Displacement and Equilibrium Models," en "*Stress Analysis*", O.C. Zienkiewicz y G. Hollister (Eds), Wiley, London, pp. 145-197, (1965).
37. C. Militello y C.A. Felippa, "A Variational Justification of the Assumed Natural Strain Formulation of Finite elements: I. Variational principles," *Computers & Structures*, Vol. **34**, pp. 431-438, (1990).
38. C. Militello y C.A. Felippa, "The First ANDES Elements: 9-dof Plate Bending Triangles," *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, Vol. **93**, pp. 217-246, (1991).
39. K. Alvin, H.M. de la Fuente, B. Haugen y C.A. Felippa, "Membrane Elements with Corner Drilling Freedoms: I. The EFF element," *Finite Elem. Anal. Design*, Vol. **12**, pp. 163-187, (1992).
40. C.A. Felippa y C. Militello, "Membrane Elements with Corner Drilling Freedoms: II. The ANDES element," *Finite Elem. Anal. Design*, Vol. **12**, pp. 189-201, (1992).
41. C.A. Felippa y S. Alexander, "Membrane Elements with Corner Drilling Freedoms: III. Implementation and Performance Validation," *Finite Elem. Anal. Design*, Vol. **12**, pp. 203-239, (1992).
42. S.P. Timoshenko, "*History of Strength of Materials*", McGraw-Hill, New York, (1953), (edición de Dover 1983).
43. R.A. Frazer, W.J. Duncan y A.R. Collar, *Elementary Matrices*, Cambridge Univ. Press, 7th printing, (1963), (Primera edición 1938).
44. R.H. MacNeal, "*The MacNeal Schwendler Corporation: The First Twenty Years*", Gardner Litograph, Buena Park, CA, (1988).
45. B.M. Fraeijs de Veubeke y O.C. Zienkiewicz, "Strain Energy Bounds in Finite Element Analysis by Slab Analogy," *J. Strain Analysis*, Vol. **2**, pp. 265-271, (1967).
46. B.M. Fraeijs de Veubeke, "Stress Function Approach," en *Proc. World Congr. on Finite Element Methods*, October 1975, Woodlands, England; reimpresso en *B.M. Fraeijs de Veubeke Memorial Volume of Selected Papers*, M. Geradin (Eds), Sitthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn, The Netherlands, pp. 663-715, (1980).
47. S.N. Patnaik, "An Integrated Force Method for Discrete Analysis," *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol. **6**, 237-251, (1973).
48. S.N. Patnaik, "The Variational Energy Formulation for the Integrated Force Method," *AIAA J.*, Vol. **24**, pp. 129-136, (1986).

49. S.N. Patnaik y H. Satish, "Analysis of Continuum Using the Boundary Compatibility Conditions of Integrated Force Method," *Computers & Structures*, Vol. **34**, pp. 287-295, (1990).
50. R.W. Clough, "The Finite Element Method in Structural Mechanics," en *Stress Analysis*, O.C. Zienkiewicz y G. Hollister (Eds), Wiley, London, pp. 85-119, (1965).
51. C. Farhat y F.X. Roux, "Implicit Parallel Processing in Structural Mechanics," *Computational Mechanics Advances*, Vol. **2**, No. 1, pp. 1-124, (1994).
52. A. Graham, "Kronecker Products and Matrix Calculus with Applications", Ellis Horwood, Chichester, (1981).
53. R.H. MacNeal, "Derivation of Element Stiffness Matrices by Assumed Strain Distribution," *Nuclear Engng. Design*, Vol. **70**, pp. 3-12, (1978).

APÉNDICE

RELACIONES MATRICIALES PARA ELEMENTOS ISOMIXTOS E HIPERMIXTOS

En este Apéndice se obtienen relaciones matriciales de utilidad para los desarrollos presentados en los apartados que estudian elementos finitos isomixtos e hipermixtos. Consideramos primero el caso de elementos isomixtos definidos por las interpolaciones (67). Estos modelos se llaman *conmutativos* si las condiciones siguientes se cumplen:

- (A) Todos los coeficientes constitutivos son constantes en cada elemento.
- (B) Cada componente de tensiones y deformaciones se interpola con las mismas funciones de forma \mathbf{N}_s .
- (C) Si los elementos se integran numéricamente, se usa la misma cuadratura para integrar todas las componentes de tensiones y deformaciones.

Si las tres condiciones se satisfacen, se demuestra que las matrices \mathbf{S} y \mathbf{C} conmutan y que su producto es \mathbf{H}^2 . La demostración se presenta para un elemento de placa en tensión plana (en vez de un elemento tridimensional) para ahorrar espacio. El elemento tiene espesor h y área A . Para este elemento la suposición (B) se escribe

$$\sigma_{11} = \mathbf{N}_s \mathbf{f}_{11}, \quad \sigma_{22} = \mathbf{N}_s \mathbf{f}_{22}, \quad \sigma_{12} = \mathbf{N}_s \mathbf{f}_{12}, \quad e_{11} = \mathbf{N}_s \mathbf{g}_{11}, \quad e_{22} = \mathbf{N}_s \mathbf{g}_{22}, \quad e_{12} = \mathbf{N}_s \mathbf{g}_{12} \quad (85)$$

donde $\mathbf{f}_{11} \dots \mathbf{g}_{12}$ son coordenadas generalizadas de tensiones y deformaciones. Consideremos un *elemento individual*. Sean E_{ij} y E'_{ij} las componentes de las matrices de módulos elásticos \mathbf{E} y \mathbf{E}^{-1} , respectivamente, que de acuerdo a la suposición (A) son constantes. Entonces las matrices \mathbf{S} , \mathbf{C} y \mathbf{H} elementales, definidas por (66) y (67), vienen dadas por las formas en bloque siguientes

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} E_{11}\mathbf{M} & E_{12}\mathbf{M} & E_{13}\mathbf{M} \\ E_{12}\mathbf{M} & E_{22}\mathbf{M} & E_{23}\mathbf{M} \\ E_{13}\mathbf{M} & E_{23}\mathbf{M} & E_{33}\mathbf{M} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} E'_{11}\mathbf{M} & E'_{12}\mathbf{M} & E'_{13}\mathbf{M} \\ E'_{12}\mathbf{M} & E'_{22}\mathbf{M} & E'_{23}\mathbf{M} \\ E'_{13}\mathbf{M} & E'_{23}\mathbf{M} & E'_{33}\mathbf{M} \end{bmatrix} \quad (86)$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{bmatrix}$$

donde

$$\mathbf{M} = \int_A h \mathbf{N}_s^T \mathbf{N}_s dA \quad (87)$$

es una matrix numérica simétrica y positiva definida. Se la denota por \mathbf{M} , pues su configuración se asemeja a la de una matriz de masa consistente. Los cuadrados \mathbf{M}^2 son \mathbf{H}^2 y también son simétricos. Las matrices (86) se representan compactamente usando el simbolismo del producto de Kronecker

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \otimes \mathbf{M}, \quad \mathbf{C} = \mathbf{E}^{-1} \otimes \mathbf{M}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{I} \otimes \mathbf{M} \quad (88)$$

La *regla mixta* de productos de Kronecker, demostrada, por ejemplo, en la página 24 de Graham,⁵² dice que

$$(\mathbf{T} \otimes \mathbf{U})(\mathbf{V} \otimes \mathbf{W}) = \mathbf{TV} \otimes \mathbf{UW} \quad (89)$$

donde \mathbf{T} a \mathbf{W} son matrices arbitrarias pero conformes en el sentido del producto matricial común. Aplicando esa regla con $\mathbf{T} \rightarrow \mathbf{E}$, $\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{E}^{-1}$ y $\mathbf{U} = \mathbf{W} \rightarrow \mathbf{M}$ da $(\mathbf{E} \otimes \mathbf{M})(\mathbf{E}^{-1} \otimes \mathbf{M}) = \mathbf{I} \otimes \mathbf{M}^2$, o sea

$$\boxed{\mathbf{SC} = \mathbf{CS} = \mathbf{H}^2} \quad (90)$$

Se ve que no sólo \mathbf{S} y \mathbf{C} conmutan, sino que su producto es independiente de los módulos de elasticidad y solamente depende de la geometría del elemento (y de la regla de integración si el elemento se evalúa por cuadratura numérica). La propiedad (90) se generaliza inmediatamente a ensamblajes de elementos en los que \mathbf{S} , \mathbf{C} y \mathbf{H} son diagonales en bloque, porque las tensiones y deformaciones son discontinuas entre elementos en los modelos estudiados en este artículo.

Puesto que \mathbf{C} y \mathbf{S} conmutan, estas matrices deben tener el mismo autosistema. Llamemos $\mathbf{\Gamma}_C^2$ y $\mathbf{\Gamma}_S^2$ las matrices diagonales de autovalores de \mathbf{C} y \mathbf{S} , respectivamente (estos valores deben ser positivos, pues \mathbf{E} y \mathbf{E}^{-1} son positivas definidas) y $\mathbf{V} = (\mathbf{V}^T)^{-1}$ la matriz ortogonal de autovectores normalizados. Entonces

$$\mathbf{C} = \mathbf{V}^T \mathbf{\Gamma}_C^2 \mathbf{V}, \quad \mathbf{S} = \mathbf{V}^T \mathbf{\Gamma}_S^2 \mathbf{V}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{V}^T \mathbf{\Gamma}_C \mathbf{\Gamma}_S \mathbf{V}, \quad \mathbf{H}^{-1} = \mathbf{V}^T \mathbf{\Gamma}_C^{-1} \mathbf{\Gamma}_S^{-1} \mathbf{V} \quad (91)$$

Si la suposición (B) falla mientras que las otras se verifican, la conmutatividad de \mathbf{S} y \mathbf{C} (que todavía son conformes) se verifica si la interpolación de las componentes

correspondientes de tensiones y deformaciones es la misma. Ahora el producto no es \mathbf{H}^2 y depende de los coeficientes constitutivos. Por ejemplo, supongamos que en un elemento cuadrilátero de tensión plana con cuatro nodos las componentes σ_{11} , σ_{22} , e_{11} y e_{22} se interpolan bilinealmente, mientras que σ_{12} y e_{12} se suponen constantes. Entonces $\mathbf{SC} = \mathbf{CS} \neq \mathbf{H}^2$, pues \mathbf{S} y \mathbf{C} no son matrices de Kronecker y la regla del producto mixto no es aplicable.

Si se interpolan las tensiones y deformaciones correspondientes con funciones diferentes (en el ejemplo, supongamos que σ_{12} es bilineal pero e_{12} es constante) las propiedades de conmutatividad y la independencia constitutiva se pierden. Además \mathbf{S} y \mathbf{C} generalmente no tienen las mismas dimensiones.

Si se usa integración numérica, puede mejorarse a veces el comportamiento del elemento utilizando integración selectiva, que es el uso de reglas de integración diferentes para ciertas componentes de tensiones y deformaciones. Esos esquemas son equivalentes a interpolación selectiva de componentes⁵³ y las propiedades estudiadas previamente valen. Puede comprobarse entonces que las suposiciones (B) y (C) están relacionadas.

Puede obtenerse otro grupo de identidades útiles para elementos hipermixtos definidos a través de las interpolaciones enriquecidas (75). Sean \mathbf{N}_{sx} las submatrices de funciones de forma para cada componente de tensiones y deformaciones. La contraparte de \mathbf{M} para el acoplamiento de modos isomixtos y enriquecidos es

$$\mathbf{M}_x = \int_A h \mathbf{N}_{sx}^T \mathbf{N}_s dA \quad (92)$$

que generalmente es una matriz rectangular. Entonces

$$\mathbf{S}_x = \begin{bmatrix} E_{11} \mathbf{M}_x & E_{12} \mathbf{M}_x & E_{13} \mathbf{M}_x \\ E_{12} \mathbf{M}_x & E_{22} \mathbf{M}_x & E_{23} \mathbf{M}_x \\ E_{13} \mathbf{M}_x & E_{23} \mathbf{M}_x & E_{33} \mathbf{M}_x \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_x = \begin{bmatrix} E'_{11} \mathbf{M}_x & E'_{12} \mathbf{M}_x & E'_{13} \mathbf{M}_x \\ E'_{12} \mathbf{M}_x & E'_{22} \mathbf{M}_x & E'_{23} \mathbf{M}_x \\ E'_{13} \mathbf{M}_x & E'_{23} \mathbf{M}_x & E'_{33} \mathbf{M}_x \end{bmatrix} \quad (93)$$

$$\mathbf{H}_x = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_x & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_x & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_x \end{bmatrix}$$

En la notación de productos Kronecker tenemos $\mathbf{S}_x = \mathbf{E} \otimes \mathbf{M}_x$, $\mathbf{C}_x = \mathbf{E}^{-1} \otimes \mathbf{M}_x$ y $\mathbf{H}_x = \mathbf{I} \otimes \mathbf{M}_x$. Aplicando la regla del producto mixto y usando (88), se deduce que \mathbf{S}_x y \mathbf{C}_x pueden expresarse como transformaciones lineales de \mathbf{S} y \mathbf{C} , respectivamente

$$\begin{aligned} (\mathbf{E} \otimes \mathbf{M}_x)(\mathbf{E}^{-1} \otimes \mathbf{M}) &= \mathbf{I} \otimes \mathbf{M}_x \mathbf{M}, & \rightarrow & \quad \mathbf{S}_x \mathbf{C} = \mathbf{H}_x \mathbf{H} \\ (\mathbf{E}^{-1} \otimes \mathbf{M}_x)(\mathbf{E} \otimes \mathbf{M}) &= \mathbf{I} \otimes \mathbf{M}_x \mathbf{M}, & \rightarrow & \quad \mathbf{C}_x \mathbf{S} = \mathbf{H}_x \mathbf{H} \end{aligned} \quad (94)$$

Añadiendo a éstas la identidad $\mathbf{H}_x = \mathbf{H}_x \mathbf{H} \mathbf{H}^{-1}$ se obtiene finalmente

$$\boxed{\mathbf{S}_x = \mathbf{T} \mathbf{S}, \quad \mathbf{C}_x = \mathbf{T} \mathbf{C}, \quad \mathbf{H}_x = \mathbf{T} \mathbf{H} \quad \text{donde} \quad \mathbf{T} = \mathbf{H}_x \mathbf{H}^{-1}} \quad (95)$$